

# Apunts de GEOMETRIA DIFERENCIAL

Pere Pascual Gainza

Facultat de Matemàtiques i Estadística, UPC

Maig de 2014



# Índex

<b>1</b>	<b>Corbes al pla i a l'espai</b>	<b>7</b>
1.1	Corbes a l'espai .. .. .	7
1.2	Curvatura d'una corba plana .. .. .	9
1.3	El triedre de Frenet d'una corba a l'espai .. .. .	10
1.4	El teorema fonamental .. .. .	13
<b>2</b>	<b>Superfícies</b>	<b>15</b>
2.1	Què és una superfície? .. .. .	15
2.2	Funcions diferenciables .. .. .	20
2.3	El pla tangent .. .. .	21
2.4	La primera forma fonamental .. .. .	23
<b>3</b>	<b>Curvatura</b>	<b>27</b>
3.1	Superfícies orientables .. .. .	27
3.2	L'aplicació de Gauss: curvatura .. .. .	28
3.3	La segona forma fonamental .. .. .	30
3.4	Corbes sobre una superfície .. .. .	32
3.5	El teorema egregi de Gauss .. .. .	37
3.6	El teorema fonamental de la teoria local de superfícies .. .. .	40
<b>4</b>	<b>Algunes superfícies notables</b>	<b>43</b>
4.1	Superfícies de revolució .. .. .	43
4.2	Superfícies reglades .. .. .	47
4.3	Superfícies minimals .. .. .	52
<b>5</b>	<b>Geodèsiques</b>	<b>57</b>
5.1	Derivada covariant i transport paral·lel .. .. .	57
5.2	Geodèsiques .. .. .	64

5.3	L'aplicació exponencial: propietats minimal de les geodèsiques	68
5.4	El teorema de Hopf-Rinow	77
<b>6</b>	<b>El teorema de Gauss-Bonnet</b>	<b>81</b>
6.1	Algunes qüestions preliminars	81
6.2	Una expressió per a la curvatura geodèsica	84
6.3	El teorema local de Gauss-Bonnet	85
6.4	El teorema de Gauss-Bonnet	86
6.5	L'índex d'un camp vectorial amb singularitats aïllades	90
<b>7</b>	<b>Curvatura constant</b>	<b>95</b>
7.1	Introducció: geometries no euclidianes	95
7.2	Un recíproc del teorema egregi	98
7.3	Superfícies de revolució de curvatura constant	100
7.4	Superfícies de curvatura constant positiva	103
7.5	Superfícies de curvatura constant zero	106
7.6	Superfícies de curvatura constant negativa: el pla hiperbòlic	108
	<b>Bibliografia</b>	<b>115</b>

# Introducció

Aquestes notes corresponen aproximadament als temes exposats els darrers cursos a l'assignatura de Geometria Diferencial del Grau de Matemàtiques de la UPC. Configuren un curs estàndard de geometria de les corbes i les superfícies de l'espai, i segueixen de prop alguns dels excel·lents textos existents, citats a les referències.

El contingut d'aquests apunts té dues parts ben diferenciades. En els quatre primers capítols s'estudien les propietats locals bàsiques de les corbes i les superfícies. Aquesta part, juntament amb part de les dues primeres seccions del capítol 5, conforma el contingut més bàsic del curs, en el qual s'introdueixen les curvatures i s'estudien diversos exemples de corbes i superfícies de l'espai.

El capítol 5 està dedicat a les geodèsiques. En les primeres seccions es defineixen les geodèsiques i se'n donen exemples, particularment les de les superfícies de revolució. A partir de la secció 5.3 s'analitzen les propietats minimal de les geodèsiques, per a la qual cosa s'introdueix l'aplicació exponencial i les seves propietats fonamentals. Podríem dir que és a partir d'aquesta secció que s'inicia l'estudi de la geometria intrínseca de les superfícies, encara que no se'n faci menció explícita. El tema 6 està dedicat al teorema de Gauss-Bonnet i algunes de les seves conseqüències, entre les quals cal destacar el teorema de l'índex de Poincaré-Hopf, la demostració del qual hem obviat a les classes presencials. L'estudi de les superfícies finalitza al capítol 7, on s'analitzen alguns resultats sobre les superfícies de curvatura constant. L'objectiu del capítol és demostrar el teorema de rigidesa de l'esfera, introduir el pla hiperbòlic i presentar breument les superfícies completes de curvatura constant com a models de les geometries no euclidianes; tot i això, hem afegit sense demostració les caracteritzacions de les superfícies completes de curvatura zero o el teorema de Hilbert sobre les superfícies de curvatura constant negativa.

No hem inclòs, per falta de temps, el darrer capítol de l'assignatura, aquell en el qual s'introdueixen les varietats diferencials i s'analitzen algunes de les extensions de les

nocions i resultats establerts en capítols anteriors a aquest context més general.

Aquesta introducció, així com tot el contingut de les notes que segueixen, és molt provisional i sofrirà successives millores en un futur. Tot i això, aquestes notes provisionals s'han mostrat de certa utilitat com a guió del curs, i és per això que les faig accessibles.

D'entre les mancances d'aquestes notes respecte del què s'ha presentat al curs o del que, al nostre entendre, seria aconsellable, assenyalem:

- falten figures que il·lustrin els exemples i resultats presentats.
- falten mols exemples que han estat treballats en les classes de problemes, així com la llista d'exercicis que vam proposar al llarg del curs, i que estava disponible a la intranet de l'assignatura.
- falta el capítol 8 dedicat a les varietats de dimensió superior.

He compartit l'assignatura amb els professors Eva Miranda i Agustí Roig, a qui vull agrair les discussions mantingudes al voltant dels continguts i la redacció d'aquestes notes, així com l'elaboració del listat d'exercicis que vam proposar als estudiants, que formaven part imprescindible del curs.

Barcelona, maig 2014

# Corbes al pla i a l'espai

En aquest capítol analitzem la teoria local de les corbes diferenciables planes i de l'espai a través del triedre de Frenet associat.

## 1.1 Corbes a l'espai

Definim corbes a partir de la idea intuïtiva de que descriuen la trajectòria, a l'espai ordinari, d'una partícula entre dos instants  $a \leq t \leq b$ . En aquesta secció l'espai serà  $\mathbb{R}^n$ , encara que en les seccions posteriors ens restringirem a  $n = 2, 3$ .

**1.1.1 Definició.** Sigui  $I \subset \mathbb{R}$  un interval. Una *corba parametritzada* és una aplicació diferenciable (usualment suposarem  $C^\infty$ )

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

A  $t \in I$  l'anomenem el *paràmetre* de la corba. Direm que  $\alpha$  és una *corba parametritzada regular* si  $\alpha'(t) \neq 0$  per a tot  $t \in I$ .

**1.1.2 Exemples.** 1. Una aplicació constant  $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$  defineix una corba parametritzada, però no és una corba parametritzada regular. Dit altrament, un punt de l'espai és una corba parametritzada, no regular.

2. Donat un punt  $p \in \mathbb{R}^n$  i un vector no nul  $v \in \mathbb{R}^n$ , les rectes  $\alpha(t) = p + tv$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , són corbes parametritzades regulars. Observem que la imatge d'una corba parametritzada regular  $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$  està continguda en una recta si, i només si,  $\alpha'(t)$  i  $\alpha''(t)$  són linealment dependents.

3. La corba parametritzada

$$\alpha(t) = (t^2, t^3), \quad t \in \mathbb{R},$$

és regular en els punts en què  $t \neq 0$ . En el punt  $t = 0$  la corba no és regular, direm que aquest és un punt singular.

#### 4. La corba parametrizada

$$\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4), \quad t \in \mathbb{R},$$

és regular en tots els seus punts. Observem que  $\alpha(2) = \alpha(-2)$ , és a dir, que la corba passa per l'origen en dos instants diferents.

Si recorrem la trajectòria descrita per la corba  $\alpha$  a una altra velocitat, direm que hem reparametrizat la corba. Més concretament,

**1.1.3 Definició.** Siguin  $I, J \subset \mathbb{R}$  dos intervals. Anomenarem *aplicació de canvi de paràmetre* a tota aplicació bijectiva  $h : J \rightarrow I$ , diferenciable i amb inversa diferenciable.

Direm que la corba

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

és una *reparametrització* de  $\alpha$ . Direm que la reparametrització *conserva l'orientació* si  $h'(s) > 0$  per a tot  $s \in J$ , en cas contrari direm que la reparametrització *inverteix* l'orientació.

Observem que la traça de  $\beta$  és la mateixa que la traça de  $\alpha$  ( $\beta(J) = \alpha(I)$ ) i que es té

$$\alpha \text{ regular} \iff \beta \text{ regular}.$$

**1.1.4 Definició.** Sigui  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una corba parametrizada i  $t_0, t_1 \in I$ . Es defineix la longitud de  $\alpha$  entre  $t_0$  i  $t_1$  per

$$\ell(\alpha; t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt.$$

Observem que si  $\alpha$  és una corba regular amb  $|\alpha'(t)| = 1$  en tots els punts, aleshores la longitud de la corba entre dos instants  $t_0, t_1$  ve donada per

$$\ell(\alpha; t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(u)| du = t_1 - t_0.$$

Dit altrament, si la velocitat és 1, el paràmetre (el temps) es correpon amb la longitud recorreguda. En aquest cas direm que el *paràmetre és  $t$  és el paràmetre arc*, paràmetre que denotarem per  $s$ .



**1.1.5 Teorema.** *Tota corba parametritzada regular admet una reparametrització pel paràmetre arc.*

*Demostració.* Sigui  $t_0 \in I$ ; definim la funció arc  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  segons

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du.$$

Aquesta funció és derivable i, com la corba és regular, té derivada positiva i no nul·la

$$s'(t) = |\alpha'(t)| > 0.$$

Per tant és una funció monòtona creixent,  $J = s(I) \subset \mathbb{R}$  és un interval i es té un difeomorfisme  $s : I \rightleftharpoons J : t$  amb

$$t'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|}.$$

Així, la reparametrització  $\beta(s) = \alpha(t(s))$  satisfà  $|\beta'(s)| = 1$ , és a dir, és una reparametrització per l'arc. ■

## 1.2 Curvatura d'una corba plana

En aquesta secció  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  denota una corba parametritzada regular del pla, que suposarem que està parametritzada per l'arc  $\alpha(s)$ .

**1.2.1 Definició.** Es defineix el *vector (unitari) tangent* de  $\alpha$  per  $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$  i el *vector normal* de  $\alpha$  com l'únic vector unitari  $\mathbf{n}(s)$  tal que  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$  formen una base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^2$ .

Com  $\mathbf{t}(s)$  és unitari, en resulta  $\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$  i, per tant,  $\mathbf{t}'(s)$  és linealment dependent de  $\mathbf{n}(s)$ .

**1.2.2 Definició.** Es defineix la *curvatura*  $\kappa(s)$  de  $\alpha(s)$  com la funció  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  determinada per

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

**1.2.3 Exemple.** Considerem la circumferència de radi  $R$ ,  $\alpha(s) = (R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R})$ . Aleshores,

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}\right) \Rightarrow \mathbf{n}(s) = \left(-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R}\right), \\ \mathbf{t}'(s) = \alpha''(s) &= \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R}\right) \Rightarrow \mathbf{t}'(s) = \frac{1}{R} \mathbf{n}(s) \Rightarrow \kappa(s) = \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Euler definia la curvatura com la taxa de variació de la direcció tangent  $\mathbf{t}(s)$  respecte del paràmetre arc. Més concretament, es té:

**1.2.4 Proposició.** *Sigui  $\theta(s)$  una determinació diferenciable de l'angle orientat entre  $\mathbf{t}(s)$  i el vector  $e_1$ . Aleshores,*

$$\kappa(s) = \theta'(s).$$

*Demostració.* Els vectors tangent i normal a la corba són

$$\mathbf{t}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)), \quad \mathbf{n}(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)),$$

i per tant,

$$\mathbf{t}'(s) = (-\theta'(s) \sin \theta(s), \theta'(s) \cos \theta(s)) = \theta'(s) \mathbf{n}(s) \implies \kappa(s) = \theta'(s). \quad \blacksquare$$

**1.2.5 Corol·lari (Teorema fonamental de les corbes planes).** *Sigui  $I \subset \mathbb{R}$  un interval obert i  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funció diferenciable. Aleshores existeix una corba plana regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametritzada per l'arc i amb curvatura  $\kappa(s) = f(s)$ . A més,  $\alpha$  és única llevat de moviments directes.*

*Demostració.* Imposem l'equació diferencial que se segueix de la proposició anterior

$$\theta'(s) = \kappa(s) = f(s) \implies \theta(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^s f(s) ds,$$

d'on resulta que

$$\alpha'(s) = \mathbf{t}(s) = \left( \cos \left( \theta(s_0) + \int_{s_0}^s f(s) ds \right), \sin \left( \theta(s_0) + \int_{s_0}^s f(s) ds \right) \right),$$

i, tornant a integrar,

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \int_{s_0}^s \mathbf{t}(s) ds.$$

Observem que les constants d'integració determinen una translació de vector  $\alpha(s_0)$  i un gir d'angle  $\theta(s_0)$ , d'on resulta la unicitat llevat de moviments directes del pla.  $\blacksquare$

### 1.3 El triedre de Frenet d'una corba a l'espai

En aquesta secció fixem una corba regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , parametritzada per l'arc. Direm que  $\alpha$  és *biregular* si  $\alpha''(s) \neq 0$  per a tot  $s \in I$ .

**1.3.1 Definició.** Es defineix la *curvatura* de  $\alpha$  com la funció no negativa

$$\kappa(s) = |\alpha''(s)|.$$

Si la corba és biregular,  $\kappa(s) \neq 0$  per a tot  $s \in I$ , es defineix el *vector normal* per

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}.$$

Observem que en el cas de corbes planes, aquesta darrera definició correspon al valor absolut de la curvatura definida en la secció anterior i que, per tant, per a aquestes corbes hi ha una certa ambigüïtat quan parlem de curvatura. El context permetrà saber a quina de les dues definicions ens referim.

**1.3.2 Definició.** Suposem que  $\alpha$  és birregular. Es defineix el *vector binormal* per

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}.$$

Al triedre  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$  l'anomenarem el *triedre de Frenet* de la corba.

**1.3.3 Proposició.** *Suposem que  $\alpha$  és biregular. Aleshores,  $\alpha$  està continguda en un pla si, i només si, el vector binormal  $\mathbf{b}(s)$  és constant.*

*Demostració.* La implicació directa és immediata. Per a la recíproca, suposem que  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}_0$  és constant, basta veure que la funció  $f(s) = \langle \alpha(s), \mathbf{b}_0 \rangle$  és constant, ja que aleshores la corba estarà continguda al pla normal a  $\mathbf{b}_0$ . En efecte, calculem la derivada

$$f'(s) = \langle \alpha'(s), \mathbf{b}_0 \rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0. \quad \blacksquare$$

**1.3.4 Definició.** En les condicions anteriors, es defineix la *torsió* de  $\alpha$  com la funció

$$\tau(s) = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle.$$

Així, la darrera proposició ens diu que per a les corbes biregulars,

$$\alpha \text{ està continguda en un pla} \iff \tau \equiv 0.$$

**1.3.5 Fórmules de Frenet** *Segui  $\alpha$  una corba birregular parametrizada per l'arc. Aleshores, el triedre de Frenet satisfà les equacions*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= -\tau(s)\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

**1.3.6** Donat que tota corba regular pot reparametritzar-se pel paràmetre arc, és possible definir els conceptes locals desenvolupats en aquesta secció per a corbes parametritzades biregulars qualssevol,  $\alpha(t)$ . Deixarem com a exercici provar que el triedre de Frenet en funció del paràmetre  $t$  és

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}, \quad \mathbf{b}(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}, \quad \text{i} \quad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t),$$

i la curvatura i la torsió venen donades per

$$\kappa(t) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}.$$

Així, si  $c(t) = |\alpha'(t)|$  és la *celeritat* de la corba, les fórmules de Frenet s'escriuen

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(t) &= \kappa(t)c(t)\mathbf{n}(t) \\ \mathbf{n}'(t) &= -\kappa(t)c(t)\mathbf{t}(t) + \tau(t)c(t)\mathbf{b}(t) \\ \mathbf{b}'(t) &= -\tau(t)c(t)\mathbf{n}(t) \end{aligned}$$

**1.3.7** Els plans generats pels parells de vectors del triedre de Frenet reben els nom següents:

*pla osculador*: generat pels vectors  $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ ,  
*pla normal*: generat pels vectors  $\mathbf{n}, \mathbf{b}$ ,  
*pla rectificador*: generat pels vectors  $\mathbf{t}, \mathbf{b}$ .

**1.3.8** *Forma canònica local.* Les fórmules de Frenet permeten aproximar les projeccions d'una corba  $\alpha(s)$  als plans osculador, normal i rectificador en un punt. En efecte, suposem que la corba està parametritzada per l'arc, fixem  $s_0$  i considerem la fórmula de Taylor de grau 3 de  $\alpha(s)$  en  $s_0$  (que, per comoditat, suposarem que és  $s_0 = 0$ ):

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)s + \frac{\alpha''(0)}{2}s^2 + \frac{\alpha'''(0)}{6}s^3 + R_4.$$

De les fórmules de Frenet deduïm

$$\alpha'(s_0) = \mathbf{t}_0, \quad \alpha''(s_0) = \kappa_0 \mathbf{n}_0, \quad \alpha'''(s_0) = \kappa'_0 \mathbf{n}_0 - \kappa_0^2 \mathbf{t}_0 + \kappa_0 \tau_0 \mathbf{b}_0,$$

on el subíndex 0 indica que les funcions corresponents estan avaluades en 0. Substituint aquests valors en la fórmula de Taylor obtenim

$$\alpha(s) - \alpha_0 = \left(s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3\right) \mathbf{t}_0 + \left(\frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa'_0}{6}s^3\right) \mathbf{n}_0 + \left(\frac{\kappa_0 \tau_0}{6}s^3\right) \mathbf{b}_0 + R_4.$$

Així, els termes dominants en cadascuna de les projeccions són:

- sobre el pla osculador,  $s\mathbf{t}_0 + (\kappa_0/2)s^2\mathbf{n}_0$ , que és una paràbola,
- sobre el pla normal,  $(\kappa_0/2)s^2\mathbf{n}_0 + (\kappa'_0/6)s^3\mathbf{b}_0$ , que és una cúspide,
- i sobre el pla rectificador,  $s\mathbf{t}_0 + (\kappa'_0/6)s^3\mathbf{b}_0$ , expressió que indica que travessem aquest pla quan  $\tau_0 \neq 0$ .

## 1.4 El teorema fonamental

La curvatura i la torsió d'una corba la determinen llevat de moviments, en el sentit que especifica el següent resultat:

**1.4.1 Teorema fonamental de les corbes a l'espai.** *Sigui  $I \subset \mathbb{R}$  un interval obert i  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  dues funcions  $C^\infty$ , amb  $f(s) > 0$  per a tot  $s \in I$ . Aleshores, existeix una corba biregular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $s \in I$  és el paràmetre arc i  $f(s) = \kappa(s)$  i  $g(s) = \tau(s)$  són la curvatura i la torsió, respectivament, de  $\alpha$ . A més, aquesta corba és única llevat de moviments directes de  $\mathbb{R}^3$ .*

*Demostració.* Les fórmules de Frenet i el paràmetre arc imposen condicions que ha de satisfer la corba  $\alpha$  que estem buscant

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{t}'(s) &= f(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -f(s)\mathbf{t}(s) + g(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= -g(s)\mathbf{n}(s)\end{aligned}$$

Observem que obtenim així un sistema de 12 equacions diferencials lineals amb 12 funcions per determinar. Per tant, del teorema d'existència i unicitat se segueix que, fixades les condicions inicials, hi ha una única solució, que és vàlida per a tots els  $s \in I$  (ja que es tracta d'un sistema lineal). Prenem  $s_0 \in I$  i fixem les condicions inicials

$$\alpha(s_0) = 0, \quad \mathbf{t}(s_0) = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{n}(s_0) = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{b}(s_0) = \mathbf{e}_3,$$

i sigui  $\alpha(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$  l'única solució del sistema amb aquestes condicions inicials.

Observem que el triedre  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$  és ortonormal per a tot  $s \in I$ . En efecte, considerem el sistema d'equacions diferencials lineals que satisfan les sis funcions determinades pels productes escalars d'aquests vectors. Per exemple,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle' &= \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle \\ &= \langle f(s)\mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle + \langle \mathbf{t}(s), -f(s)\mathbf{t}(s) + g(s)\mathbf{b}(s) \rangle \\ &= -f(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle + f(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle + g(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle.\end{aligned}$$

El sistema resultant és

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2f & 0 & 2g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2g \\ -f & f & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g & 0 & f \\ 0 & -g & g & 0 & -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle \end{pmatrix}$$

Aquest sistema lineal admet la solució constant  $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$  i pel teorema d'existència i unicitat resulta que és l'única solució, és a dir,  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$  formen una base ortonormal. A més, com en les condicions inicials el determinant és positiu, ho serà per continuïtat per tot  $s$ , és a dir, és una base ortonormal directa.

Pel que fa a la unicitat de  $\alpha$ , sigui  $\beta$  una altra solució del sistema i considerem la matriu ortogonal formada pels vectors (columna) del triedre de Frenet de  $\beta$  en  $s_0$ ,

$$A = (\mathbf{t}_\beta(s_0), \mathbf{n}_\beta(s_0), \mathbf{b}_\beta(s_0)),$$

i  $p = -A\beta(s_0)$ . Aleshores, el moviment directe  $F(x) = Ax + p$  transforma  $\beta$  en  $\alpha$ , ja que la corba  $\tilde{\beta}(s) = F(\beta(s))$  satisfà

$$\tilde{\beta}(s_0) = 0, \quad (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})_{\tilde{\beta}(s_0)} = (e_1, e_2, e_3),$$

i per la unicitat de les solucions amb condicions inicials fixades, resulta que  $\tilde{\beta} = \alpha$ . ■

Al paràmetre arc  $s$ , i les funcions  $\kappa(s)$  i  $\tau(s)$  se les anomena les *equacions intrínseques* de la corba  $\alpha(s)$ .

**1.4.2 Observació.** La teoria exposada en aquest capítol es pot estendre a l'estudi de les corbes de l'espai  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$  fent els ajustos corresponents.

En efecte, la curvatura d'una corba en un punt mesura la desviació de la corba respecte de la recta tangent, i la torsió mesura la desviació de la corba respecte del pla oscul·lador; per a les corbes a  $\mathbb{R}^n$ , necessitem una altra curvatura que mesuri la desviació de la corba respecte d'una subvarietat lineal de dimensió 3, i així successivament.

D'aquesta forma, donat un paràmetre  $s$  les corbes de  $\mathbb{R}^n$  que el tenen per paràmetre arc estan determinades per bases ortonormals  $e_1(s), \dots, e_n(s)$ ,  $n-1$  curvatures,  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-1}$  i les fórmules de Frenet corresponents. Per a més detalls, consulteu [S].

## 2

# Superfícies

En aquest capítol s'introdueix la noció de superfície i de pla tangent en un punt. Tot i que estarem interessats majoritàriament en superfícies de l'espai  $\mathbb{R}^3$ , les nocions que s'introdueixen en aquest capítol no depenen de la dimensió de l'espai ambient, per la qual cosa ens situarem a l'espai euclidià  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.1 Què és una superfície?

De forma similar al cas de corbes, partim de la idea que una superfície correspon a la deformació a l'espai d'una regió del pla.

**2.1.1 Definició.** Una *superfície parametritzada* de  $\mathbb{R}^n$  és una aplicació  $C^\infty$

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

on  $U \subset \mathbb{R}^2$  és un obert del pla. Direm que  $\varphi$  és una superfície parametritzada *regular* si

$$\text{rang } d\varphi_{(u,v)} = 2, \quad \forall (u,v) \in U.$$

**2.1.2 Exemples.** (1) La definició de superfície parametritzada inclou els casos en què  $\varphi = \text{cnt}$  o què  $\varphi$  no depèn d'una de les variables. Aquestes superfícies no són regulars; de fet són superfícies parametritzades *degenerades*, en el sentit de que corresponen a un punt o a una corba.

(2) La superfície parametritzada

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v), \quad u \in (0, 2\pi), \quad v \geq 0,$$

que correspon a la part  $z \geq 0$  del con  $x^2 + y^2 = z^2$ , és regular en tots els punt llevat del que correspon a  $v = 0$ .

D'altra banda, la superfície

$$\psi(u, v) = (u^2, u^3, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

parametriza el cilindre sobre la cúspide plana  $x^3 = y^2$ ; és regular en tots els punts llevat dels que genera la singularitat de la cúspide, és a dir, llevat dels punts  $(0, v)$ .

Aquests dos exemples són paradigmàtics, cosa que podríem enunciar, en un sentit imprecís, en la forma: una superfície parametritzada amb punxes o arestes deixa de ser regular en aquests punts.

(3) La superfície parametritzada

$$\varphi(u, v) = (u^3 - 4u, u^2 - 4, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

és regular en tots els punts. Observem que aquesta superfície és el cilindre sobre la corba plana  $\alpha(u) = (u^3 - 4u, u^2 - 4)$  i que, per tant, té una autointersecció al llarg de la recta generada per l'origen, és a dir, en els punts  $u = 0$ . Seguidament donarem una definició més restrictiva de superfície regular que elimina les autointerseccions, tot i que al llarg del curs serà interessant disposar, en algunes situacions, de la possibilitat de tenir autointerseccions.

(4) Els exemples anteriors corresponen a superfícies parametritzades de  $\mathbb{R}^3$ . En aquest capítol, la dimensió de l'espai ambient  $\mathbb{R}^n$  no juga cap paper, per la qual cosa la deixarem indeterminada, encara que posteriorment ens centrarem en el cas  $n = 3$ .

Disposar de  $n \geq 4$  ens permet incloure alguns exemples que no s'encabeixen a  $\mathbb{R}^3$ , com per exemple, l'ampolla de Klein o el pla projectiu, o el producte de dues corbes. Així, si  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  són dues corbes planes regulars, el producte defineix una superfície parametritzada regular

$$\begin{aligned} \alpha \times \beta : I \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4, \\ (u, v) &\mapsto (\alpha(u), \beta(v)). \end{aligned}$$

En particular, obtenim així el tor de  $\mathbb{R}^4$  com a producte de dues circumferències.

**2.1.3 Definició.** Sigui  $S \subset \mathbb{R}^n$  amb la topologia induïda. Direm que  $S$  és una *superfície regular* si per a tot  $p \in S$  existeixen oberts  $U \subset \mathbb{R}^2$  i  $p \in V \subset S$  i una aplicació diferenciable ( $C^\infty$ )

$$\varphi : U \longrightarrow V \subset S,$$

tal que

- (i)  $\varphi$  és un homeomorfisme, és a dir,  $\varphi$  és bijectiva i la inversa  $\varphi^{-1}$  és contínua.



(ii)  $\varphi$  defineix una superfície parametritzada regular, és a dir,

$$\text{rang } d\varphi_{(u,v)} = 2, \quad \forall (u,v) \in U.$$

**2.1.4 Exemples.** (1) La gràfica d'una funció de dues variables és una superfície regular: sigui  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funció diferenciable definida en un obert  $U \subset \mathbb{R}^2$  i

$$S = \{(x, y, z) \mid z = h(x, y), (x, y) \in U\},$$

aleshores  $\varphi(x, y) = (x, y, h(x, y))$  és una parametrització que val per a tots els punts, amb inversa  $\varphi^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ , que és la restricció a  $S$  de la projecció de  $\mathbb{R}^3$  al pla  $xy$  i que, per tant, és contínua.

(2) Considerem l'esfera de radi  $R > 0$ ,  $S \subset \mathbb{R}^3$ , definida per  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . Aleshores  $S$  és una superfície regular: en efecte, prenem el punt  $p = (0, 0, 1) \in S$ ; podem aïllar  $z$  de l'equació que defineix  $S$ , prenent l'arrel positiva per tal de mantenir-nos al voltant de  $p$ ,

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

amb la qual cosa veiem que a l'obert  $V = S \cap \{z > 0\}$ ,  $S$  és la gràfica de la funció  $h(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  i, per tant, satisfà les condicions de la definició anterior. Considerant l'arrel negativa, cobrim la part de  $S$  corresponent a  $z < 0$ . Finalment, aïllant les altres variables de l'equació que defineix  $S$ , veiem que tot punt de  $S$  té un entorn parametritzat regular.

(3) El con de  $\mathbb{R}^3$ ,  $S$ , definit per  $x^2 + y^2 = z^2$ , no és una superfície regular en  $p = (0, 0, 0)$ , ja que tot entorn de  $p$  a  $S$  es desconnecta en treure-li el punt  $p$ , contràriament al què succeeix en els entorns d'un punt de  $\mathbb{R}^2$ .

(4) La superfície parametritzada regular  $\varphi : (-1, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida per

$$\varphi(u, v) = \left( \frac{3u}{1+u^3}, \frac{3u^2}{1+u^3}, v \right),$$

no és una superfície regular en el sentit de la darrera definició, ja que  $V = \varphi((-1, 1) \times (-1, 1))$  no és un obert de la superfície. En efecte, observeu que tot entorn de  $\varphi(0, 0) = (0, 0, 0)$  conté punts  $\varphi(u, v)$  per a  $u$  prou gran, que no són de  $V$ .

Mentre no diem el contrari, el terme *superfície regular* farà referència a la noció establerta en la darrera definició. Els dos primers exemples del punt anterior són paradigmàtics en els sentit que, genèricament, les equacions defineixen superfícies i que les superfícies són, localment, gràfiques. Precisem aquesta observació en les dues proposicions següents, que són conseqüència dels dos teoremes fonamentals del càlcul diferencial, el teorema de la funció implícita i el teorema de la funció inversa.

**2.1.5 Proposició.** *Sigui  $W \subset \mathbb{R}^3$  un obert,  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicació diferenciable ( $C^\infty$ ) i*

$$S = \{(x, y, z) \in W \mid f(x, y, z) = 0\}.$$

*Si  $\text{rang } df_p = 1$ , per a tot  $p \in S$ , aleshores  $S$  és una superfície regular.*

*Demostració.* En efecte, sigui  $p \in S$ , per hipòtesis una de les tres derivades

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)$$

és diferent de zero. Suposem que ho és la tercera,  $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ .

Pel teorema de la funció implícita, hi ha una funció diferenciable  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ , on  $U \subset \mathbb{R}^2$  és un obert, i un obert  $W' \subset W$  que conté  $p$ , tal que

$$S \cap W' = \{(x, y, z) \mid z = h(x, y)\}.$$

Dit altrament, en un entorn de  $p \in S$  el conjunt  $S$  és la gràfica d'una funció diferenciable. Com  $p$  és un punt arbitrari, deduïm que  $S$  és una superfície regular. ■

**2.1.6** Hem enunciat el resultat anterior a  $\mathbb{R}^3$ . És clar que s'estén sense dificultat a  $\mathbb{R}^n$ : sigui  $W \subset \mathbb{R}^n$  un obert,  $f : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$  una funció vectorial  $C^\infty$  i  $S = \{x \in W \mid f(x) = 0\}$ . Si  $\text{rang } df_p = n - 2$ , per a tot  $p \in S$ , aleshores  $S$  és una superfície regular.

**2.1.7 Proposició.** *Localment tota superfície regular és la gràfica d'una funció diferenciable.*

*Demostració.* Fem la prova per a superfícies de  $\mathbb{R}^3$ , tot i que el raonament és vàlid per a superfícies en un espai euclidià de dimensió arbitrària.

Abans d'entrar en la demostració, precisem una mica millor l'enunciat: si  $S \subset \mathbb{R}^3$  és una superfície regular i  $p \in S$ , aleshores existeix un entorn obert  $W \subset S$  de  $p$  que admet una parametrització com a gràfica d'una funció  $C^\infty$ .

Sigui  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superfície regular i  $\varphi : U \rightarrow S$  una parametrització regular al voltant d'un punt  $p \in S$ , amb  $\varphi(q) = p$ . Com el rang de  $d\varphi_q$  és dos, un dels tres menors

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q), \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}(q), \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(q),$$

és diferent de zero. Suposem que ho és el primer. Aleshores l'aplicació diferenciable

$$\psi : U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{(x, y)} \mathbb{R}^2$$

té jacobià no nul a  $q \in U$ . Si  $q' = \psi(q)$ , pel teorema de la funció inversa, existiran entorns oberts  $U'$  i  $V'$  de  $q$  i  $q'$ , respectivament, i una funció diferenciable  $\psi^{-1} : V' \rightarrow U'$ , inversa de  $\psi$ .

El conjunt  $W = \varphi(U')$  és un entorn obert de  $p$ , ja que  $\varphi^{-1}$  és contínua.

Finalment, l'aplicació  $\varphi\psi^{-1} : V' \rightarrow W \subset S$  defineix una parametrització en un entorn de  $p$  que és la gràfica de la funció  $f(x, y) = \pi_3(\varphi(\psi^{-1}(x, y)))$ . ■

En les parametritzacions locals  $\varphi$  que intervenen en la definició de superfície regular es demana que l'aplicació inversa  $\varphi^{-1}$  sigui contínua, cosa que pot resultar farregosa de comprovar. El resultat següent indica que, si sabem a priori que  $S$  és una superfície, la continuïtat de  $\varphi^{-1}$  està garantida per les altres propietats de  $\varphi$ .

**2.1.8 Proposició.** *Sigui  $S \subset \mathbb{R}^n$  una superfície regular,  $U \subset \mathbb{R}^2$  un obert i  $\varphi : U \rightarrow S$  una aplicació diferenciable que satisfà*

- (1)  $\varphi$  és injectiva,
- (2)  $\text{rang } d\varphi_{(u,v)} = 2$ , per a tot  $(u, v) \in U$ .

*Aleshores,  $\varphi(U) \subset S$  és un obert de  $S$  i  $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$  és contínua.*

*Demostració.* Un cop més, per comoditat, prendrem  $n = 3$ . Sigui  $p \in \varphi(U)$  i  $q \in U$  amb  $\varphi(q) = p$ . Per la proposició anterior, existeixen oberts  $p \in W \subset S$ ,  $V \subset \mathbb{R}^2$  i una funció diferenciable  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $W$  és la gràfica de  $f$ , és a dir,  $\psi : V \rightarrow W$  definida per  $\psi(x, y) = (x, y, f(x, y))$  és una parametrització regular.

Sigui  $U' \subset U$  l'obert  $U' = \varphi^{-1}(W)$  i definim  $h : U' \rightarrow V$  com la composició  $h = \pi\varphi$ , on  $\pi$  és la projecció ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  sobre el pla  $xy$ . Per la regla de la cadena, es té

$$dh_q = d\pi_p d\varphi_q,$$

i, per tant,  $\det dh_q \neq 0$ . Pel teorema de la funció inversa, existiran oberts  $q \in U'' \subset U'$ ,  $h(q) \in V'' \subset V$ , tals que  $h$  induïx un difeomorfisme  $h : U'' \rightarrow V''$ . Sigui  $h^{-1} : V'' \rightarrow U''$  l'aplicació inversa, que és diferenciable.

Finalment observem que  $\varphi(U'') = \pi^{-1}(h(U'')) \cap S$ , per la qual cosa és un entorn obert de  $p$ , en el qual es té

$$\varphi^{-1}|_{\varphi(U'')} = h^{-1}\pi,$$

que, com a composició d'aplicacions contínues, és contínua. ■

## 2.2 Funcions diferenciables

Sigui  $S \subset \mathbb{R}^n$  una superfície regular,  $p \in S$  i  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una funció.

**2.2.1 Definició.** Direm que  $f$  és una *funció diferenciable en  $p$*  si existeix una parametrització local  $\varphi : U \rightarrow S$ ,  $\varphi(q) = p$ , tal que  $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  és una funció diferenciable ( $C^\infty$ ) en  $q$ .

Per a que aquesta definició sigui efectiva, la diferenciabilitat de  $f$  en  $p$  no hauria de dependre de la parametrització local  $\varphi$ . Això serà conseqüència del següent resultat, que anomenarem el teorema de canvi de paràmetres.

**2.2.2 Teorema.** *Siguin  $\varphi : U \rightarrow S$  i  $\psi : V \rightarrow S$  dues parametritzacions locals d'una superfície  $S$  a l'entorn d'un punt  $p \in S$ ,  $W = \varphi(U) \cap \psi(V)$ . Aleshores, l'aplicació*

$$\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \rightarrow \psi^{-1}(W)$$

*és diferenciable, amb inversa diferenciable  $(\psi^{-1} \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi$ . A  $\psi^{-1} \circ \varphi$  l'anomenarem l'aplicació de canvi de paràmetres.*

*Demostració.* Per comoditat, suposarem que la superfície està a  $\mathbb{R}^3$ .

Notem  $h = \psi^{-1} \circ \varphi$ , i  $q \in U$ ,  $r \in V$  amb  $\varphi(q) = p$ ,  $\psi(r) = p$ , amb la qual cosa  $h(q) = r$ . Com  $\psi$  és una parametrització local, la diferencial és de rang 2 en  $r$ , suposem que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(r) \neq 0.$$

Definim  $g : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  per  $g(u, v, t) = \pi(u, v) + (0, 0, t)$ , aleshores

$$\text{Jac } g(r, 0) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(r) \neq 0,$$

i, pel teorema de la funció inversa, existeix un entorn  $W$  de  $p = g(r, 0)$  i una funció diferenciable  $g^{-1} : W \rightarrow U \times \mathbb{R}$ , inversa de  $g$ .

Per la continuïtat de  $\varphi^{-1}$ , existeix un entorn obert  $U'$  de  $q$  amb  $\varphi(U') \subset W$  i observem que, en aquest entorn,  $h$  és composició d'aplicacions diferenciables

$$h|_{U'} = \psi^{-1} \circ \varphi|_{U'} = g^{-1} \circ \varphi|_{U'},$$

i, per tant, és diferenciable. ■

Deduïm ara la independència de la definició de funció diferenciable de l'entorn coordinat emprat:

**2.2.3 Corollari.** *Siguin  $\varphi : U \rightarrow S$  i  $\psi : V \rightarrow S$  dues parametritzacions locals d'una superfície regular  $S$  a l'entorn d'un punt  $p = \varphi(q) = \psi(q') \in S$ , i  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una funció. Aleshores  $f \circ \varphi$  és diferenciable en  $q$  si, i només si,  $f \circ \psi$  és diferenciable en  $q'$ . ■*

Ara és clar com definir la diferenciabilitat d'aplicacions vectorials  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  mitjançant la diferenciabilitat de les seves components, cosa que permet definir les aplicacions diferenciables entre superfícies: si  $S \subset \mathbb{R}^n$  i  $S' \subset \mathbb{R}^m$  són dues superfícies regulars, una aplicació  $f : S \rightarrow S'$  és diferenciable en un punt  $p \in S$  si l'aplicació  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  és diferenciable.

**2.2.4 Definició.** Una aplicació  $f : S \rightarrow S'$  és un *difeomorfisme* si és diferenciable, bijectiva i amb inversa diferenciable. Direm que dues superfícies regulars són *difeomorfes* si existeix un difeomorfisme entre elles.

Observem que si  $\varphi : U \rightarrow S$  és una parametrització local, aleshores  $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$  és diferenciable i, de fet, és un difeomorfisme.

**2.2.5 Exemple.** Sigui  $S$  l'obert de l'esfera unitat  $\mathbb{S}^2$  complementari dels punts  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 0, -1)$  i  $S'$  l'obert del cilindre  $x^2 + y^2 = 1$ , determinat per  $-1 < z < 1$ . Considerem l'aplicació  $f : S \rightarrow S'$  definida de la forma següent: si  $p \in S$ , sigui  $r$  el semiradi que parteix de l'eix  $z$  paral·lel al pla  $xy$  i que passa per  $p$ , definim  $f(p) = r \cap S'$ . Aleshores  $f$  és diferenciable i, de fet, un difeomorfisme.

## 2.3 El pla tangent

Sigui  $S \subset \mathbb{R}^n$  una superfície regular,  $p \in S$ .

**2.3.1 Definició.** Un vector  $w \in \mathbb{R}^n$  direm que és *tangent a  $S$  en  $p$*  si existeix una corba parametritzada  $\alpha : I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$  amb  $\alpha(0) = p$  i  $\alpha'(0) = w$ . Denotarem per  $T_p S$  el conjunt de vectors tangents a  $S$  en  $p$ .

**2.3.2 Exemple.** Si  $\varphi : U \rightarrow S$  és una parametrització local en  $p$  amb  $\varphi(0, 0) = p$ , aleshores els vectors

$$\varphi_u(0, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0, 0), \quad \varphi_v(0, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0, 0),$$

són els vectors tangents a les corbes coordenades  $v = 0$  i  $u = 0$ , respectivament.

**2.3.3 Proposició.** *Amb les notacions de l'exemple anterior,*

$$T_p S = \text{Im } d\varphi_0,$$

*i, en particular,  $T_p S$  és un espai vectorial de dimensió 2, que anomenarem el pla tangent a  $S$  en  $p$ .*

*Demostració.* Considerem un vector  $v \in \mathbb{R}^2$ . Aleshores, hi ha un  $\varepsilon > 0$  amb  $tv \in U$  per a  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  i, per a aquests valors de  $t$ , estarà definida la corba de  $S$ ,  $\alpha_v(t) = \varphi(tv)$ . Per a  $\alpha_v$  es té  $\alpha_v(0) = p$  i  $\alpha'_v(0) = d\varphi_0(v)$ , per tant,  $\text{Im } d\varphi_0 \subset T_p S$ .

Recíprocament, sigui  $w = \alpha'(0) \in T_p S$ . La composició  $\alpha_w = \varphi^{-1}\alpha$  defineix una corba diferenciable a  $U$ , per a la qual es té

$$d\varphi_0(\alpha'_w(0)) = \frac{d(\varphi\alpha_w)}{dt}(0) = \alpha'(0) = w,$$

d'on resulta l'altra inclusió  $T_p S \subset \text{Im } d\varphi_0$ . ■

**2.3.4 Proposició.** *Suposem que  $S$  està definida per una equació implícita,  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$ , amb rang  $df_p = 1$ , per a tot  $p \in S$ . Aleshores,*

$$T_p S = \ker df_p.$$

*Demostració.* Sigui  $\varphi : U \rightarrow S$  una parametrització regular en un entorn de  $p$ , amb  $\varphi(0) = p$ . Aleshores,  $f\varphi = 0$  i, per tant,  $df_p d\varphi_0 = 0$ . És a dir,  $T_p S \subset \ker df_p$ . Com ambdós espais vectorials són de dimensió dos, en resulta la igualtat. ■

**2.3.5 Definició.** Sigui  $f : S \rightarrow S'$  una aplicació diferenciable i  $p \in S$ . Definim l'*aplicació diferencial de  $f$  en  $p$*  per

$$\begin{aligned} df_p : T_p S &\longrightarrow T_{f(p)} S' \\ w = \alpha'(0) &\longmapsto (f\alpha)'(0). \end{aligned}$$

**2.3.6 Proposició.** *L'aplicació diferencial  $df_p$  està ben definida i és una aplicació lineal.*

*Demostració.* Anem a descriure  $df_p$  en un sistema local de coordenades i com a resultat de l'expressió que obtindrem en resultarà la proposició.

Siguin  $\varphi : U \rightarrow S$  i  $\psi : V \rightarrow S'$  sengles sistemes de coordenades al voltant de  $p$  i  $f(p)$ , i  $h = \psi^{-1}f\varphi : \varphi^{-1}(\psi(V)) \rightarrow \psi^{-1}(\varphi(U))$  l'expressió de  $f$  en aquestes coordenades.

Si  $w = \alpha'(0) = a\varphi_u + b\varphi_v$ , aleshores la corba  $\beta(t) = f(\alpha(t))$  és igual a  $\beta(t) = \psi h\varphi^{-1}(t)$  i, segons la definició de l'aplicació diferencial

$$df_p(w) = \beta'(0) = d\psi(dh(a, b)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

**2.3.7** L'aplicació diferencial permet transferir resultats del càlcul diferencial a les aplicacions diferenciables entre superfícies. Així, per exemple, serà vàlida la regla de la cadena, o el teorema de la funció inversa, que enunciem a continuació.

**2.3.8 Teorema de la funció inversa.** *Sigui  $f : S \rightarrow S'$  una aplicació diferenciable i  $p \in S$ . Si  $\det df_p \neq 0$ , aleshores existeixen entorns oberts  $p \in V \subset S$  i  $f(p) \in W \subset S'$  tals que  $f : V \rightarrow W$  és un difeomorfisme.* ■

## 2.4 La primera forma fonamental

En aquesta secció analitzem els aspectes mètrics de les superfícies que es deriven del producte escalar ordinari de l'espai  $\mathbb{R}^n$ .

Sigui  $S \subset \mathbb{R}^n$  una superfície regular i  $p \in S$ . Denotarem per  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  el producte escalar definit al pla tangent  $T_p S$  pel producte escalar ordinari de  $\mathbb{R}^n$ .

**2.4.1 Definició.** La *primera forma fonamental* de  $S$  en  $p$ ,  $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ , és la forma quadràtica associada al producte escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ ,

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p \geq 0, \quad \forall w \in T_p S.$$

Calculem el producte escalar i la primera forma fonamental en un sistema de coordenades: sigui  $\varphi : U \rightarrow S$  una parametrització regular al voltant de  $p$ . Aleshores,  $\varphi_u, \varphi_v$  formen base de l'espai tangent i la matriu del producte escalar en aquesta base és

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_p & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p \\ \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p & \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_p \end{pmatrix}$$

Direm que  $E, F, G$  són els *coeficients de la primera forma fonamental* en la parametrització  $\varphi$ . Observem que aquests coeficients defineixen funcions diferenciables  $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

**2.4.2 Longitud de corbes.** Sigui  $\alpha : I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$  una corba sobre la superfície  $S$ . En funció de la parametrització  $\varphi$  la corba s'escriu  $(u(t), v(t))$  i la longitud entre  $a, b \in I$  segons

$$\ell(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2F u'v' + G(v')^2} dt.$$

Aquesta expressió s'acostuma a escriure també en la forma

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

i es diu que  $ds^2$  és l'*element de longitud* de  $S$ .

Per exemple, la longitud de les corbes  $v = cnt$ , parametritzades per  $u(t) = t$ , ve donada per

$$\ell(v = cnt) = \int_a^b \sqrt{E} dt$$

i, per tant, estàn parametritzades per l'arc si, i només si,  $E \equiv 1$ . Anàlogament, les corbes  $u = cnt$  està parametrizades per l'arc si, i només si,  $G \equiv 1$ .

**2.4.3 Angle entre dos vectors tangents.** Siguin  $v, w \in T_p S$  dos vectors unitaris tangents a  $S$  en  $p$ . L'angle entre  $v$  i  $w$  està determinat per

$$\cos \theta = \langle v, w \rangle_p,$$

i, per tant, en una parametrització pot expressar-se en funció dels coeficients de la primera forma fonamental. En particular, l'angle en què es tallen les corbes  $u = cnt$  i  $v = cnt$ , que correspon a l'angle entre  $\varphi_u$  i  $\varphi_v$ , és

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Així, les corbes coordenades de  $\varphi$  són ortogonals si, i només si,  $F = 0$ .

**2.4.4 Observació.** Si fixem el punt  $p \in S$ , sabem que  $T_p S$  admet una base ortonormal per al producte escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ . No és cert, però, que en general puguem escollir una parametrització  $\varphi$  en un entorn de  $p \in V$  en la qual la base  $(\varphi_u, \varphi_v)$  sigui ortonormal per a tot  $q \in V$ . Dit altrament, en general no és cert que existeixi un sistema de coordenades per al qual  $E, G \equiv 1, F \equiv 0$ .

Malgrat tot, sí que podem aconseguir que les corbes coordenades siguin ortogonals, és a dir, es té el resultat següent que enunciem sense demostració: *per a tot punt  $p \in S$  existeix una parametrització regular  $\varphi : U \rightarrow S$ ,  $p \in \varphi(U)$ , tal que  $F \equiv 0$ .* (vegeu [dC].)

**2.4.5 Àrea d'una regió continguda en un entorn coordinat.** Seguint amb les notacions d'aquesta secció, sigui  $D \subset S$  una regió de la superfície  $S$  continguda en un entorn coordinat  $D \subset \varphi(U)$  i tal que la funció  $\sqrt{EG - F^2}$  és integrable en  $\varphi^{-1}(D)$ . Aleshores l'àrea de  $D$  ve donada per

$$A(D) = \int_{\varphi^{-1}(D)} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Observem que per a superfícies de  $\mathbb{R}^3$ , podem utilitzar el producte vectorial per escriure

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v|^2 = EG - F^2,$$



cosa que permet interpretar l'expressió de l'element d'àrea  $dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$  com l'àrea del paral·lelogram definit pels vectors  $\Delta u \varphi_u, \Delta v \varphi_v$ .

### Isometries

Recordem que una aplicació lineal entre espais euclidians,  $F : E \rightarrow E'$ , és diu que és una isometria si és compatible amb els productes escalars, és a dir, si

$$\langle v, w \rangle_E = \langle F(v), F(w) \rangle_{E'},$$

per a qualssevol  $v, w \in E$ .

**2.4.6 Definició.** Sigui  $f : S \rightarrow S'$  una aplicació diferenciable entre superfícies regulars i  $p \in S$ . Direm que  $f$  és una *isometria local en  $p$*  si existeix un entorn  $p \in V$  tal que  $df_q$  és una isometria lineal per a tot  $q \in V$ . Direm que  $f$  és una *isometria (global)* si és un difeomorfisme i una isometria local.

**2.4.7 Observació.** (1) Una aplicació  $f : S \rightarrow S'$  diferenciable que és bijectiva i una isometria local en cada punt, és una isometria global.

(2) Les isometries conserven aquelles mesures que depenen de la primera forma fonamental, és a dir, la longitud de corbes, els angles de vectors tangents i les àrees. En general direm que una propietat és *intrínseca* si es conserva per isometries.

**2.4.8 Proposició.** Sigui  $f : S \rightarrow S'$  una aplicació diferenciable entre superfícies regulars,  $p \in S$ , i suposem que existeix una parametrització  $\varphi : U \rightarrow S$  en un entorn de  $p$  tal que  $\psi = f \circ \varphi : U \rightarrow S'$  defineix una parametrització regular en un entorn de  $f(p)$ . Denotem per  $E, F, G$  i  $E', F', G'$  els coeficients de la primera forma fonamental en les parametritzacions  $\varphi, \psi$ , respectivament. Aleshores,

$$f : \varphi(U) \rightarrow \psi(U) \text{ és una isometria} \iff E = E', F = F', G = G'.$$

*Demostració.* Donat que  $\psi = f \circ \varphi$ , es té

$$\psi_u = df_q(\varphi_u), \quad \psi_v = df_q(\varphi_v).$$

Així, si  $df_q$  és una isometria, per a tot  $q \in \varphi(U)$ , en resulta  $E = E', F = F', G = G'$ .

Recíprocament, suposem que  $E = E', F = F', G = G'$ . Sigui  $w = a\varphi_u + b\varphi_v \in T_q S$ ,  $q \in \varphi(U)$ ,  $q' = f(q)$ . Aleshores,  $df_q(w) = a\psi_u + b\psi_v$  i, per tant,

$$I_{q'}(df_q(w)) = a^2 E' + 2ab F' + b^2 G' = a^2 E + 2ab F + b^2 G = I_q(w),$$

el que acaba la prova. ■



# Curvatura

En aquest capítol fixem  $n = 3$ , és a dir, l'espai ambient serà  $\mathbb{R}^3$ , donat que definirem la curvatura a partir de la variació del vector normal. Els resultats que establirem suposaran que la superfície és orientable; com que localment tota superfície és orientable, els resultats s'apliquen, localment, a qualsevol superfície regular.

## 3.1 Superfícies orientables

Sigui  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superfície regular.

**3.1.1 Definició.** Direm que  $S$  és *orientable* si existeix un camp vectorial  $N$  normal a  $S$  i no nul, això és, si existeix una aplicació diferenciable  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $N(p) \neq 0$  i  $N(p) \perp T_p S$ , per a qualsevol  $p \in S$ . Direm que una superfície orientable  $S$  està *orientada* si hem escollit un camp normal no nul  $N$ .

Com el camp  $N$  que orienta una superfície és no nul en tots els punts, podem normalitzar-lo, de manera que l'orientabilitat de  $S$  és equivalent a l'existència d'un camp normal *unitari*  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ .

**3.1.2 Exemples.** (1) Si la superfície  $S$  està definida implícitament per l'equació

$$f(x, y, z) = 0, \quad \nabla f(p) \neq 0, \forall p \in S,$$

aleshores el camp vectorial  $N = \nabla f$  és un camp vectorial normal i no nul, per tant,  $S$  és orientable.

(2) Si hi ha una parametrització  $\varphi : U \rightarrow S$  que cobreix  $S$ , és a dir, tal que  $S = \varphi(U)$ , aleshores el camp vectorial  $\varphi_u \wedge \varphi_v$  és un camp normal i no nul, per tant,  $S$  és orientable.

El segon exemple mostra que *localment* tota superfície és orientable: per a qualsevol superfície  $S$  i qualsevol punt  $p \in S$ , hi ha un entorn coordinat  $V$  de  $p$  en  $S$  tal que  $V$  és una superfície orientable.

En general, si  $\varphi(U), \psi(V)$  són oberts coordinats de  $S$ , aleshores en els punts de la intersecció se satisfà

$$\frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} = \pm \frac{\psi_{\bar{u}} \wedge \psi_{\bar{v}}}{|\psi_{\bar{u}} \wedge \psi_{\bar{v}}|}.$$

Observem que el signe positiu correspon a què les bases  $(\varphi_u, \varphi_v)$ ,  $(\psi_{\bar{u}}, \psi_{\bar{v}})$  defineixin la mateixa orientació de  $T_p S$ , cosa que és equivalent a que  $\det d(\psi^{-1}\varphi)_0 > 0$ , si  $\varphi(0) = p$ . Però, en aquest cas, el camp normal definit per ambdues parametritzacions s'estén a un camp normal a  $\varphi(U) \cup \psi(V)$ . Aquesta és essencialment la idea de la prova de la caracterització de l'orientabilitat següent, els detalls de la qual deixem com a exercici.

**3.1.3 Proposició.** *Una superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  és orientable si, i només si, existeix un recobriment per entorns coordinats  $S = \cup_i \varphi_i(U_i)$  tal que els jacobians dels canvis de coordenades són positius,  $\det d(\varphi_j^{-1}\varphi_i) > 0$ ,  $\forall i, j$ .* ■

Observem que aquesta caracterització de l'orientabilitat no fa referència a l'espai ambient  $\mathbb{R}^3$  i que, per tant, permet definir l'orientabilitat d'una superfície en general. En el nostre cas, donat que estarem sempre a  $\mathbb{R}^3$ , bastarà disposar del camp normal unitari.

**3.1.4** Per a la resta del capítol suposarem que les superfícies són orientables. Com hem assenyalat, això sempre és així localment, per la qual cosa els conceptes que introduïrem s'aplicaran, localment, a totes les superfícies de l'espai.

Si  $S$  és una superfície orientada pel camp normal  $N$ , direm que el sistema de coordenades  $\varphi : U \rightarrow S$  és *positiu o compatible amb l'orientació* si satisfà les condicions equivalents

$$\det(\varphi_u, \varphi_v, N) > 0 \iff N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}.$$

## 3.2 L'aplicació de Gauss: curvatura

Sigui  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superfície orientada pel camp normal  $N$ . A l'aplicació diferenciable  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  l'anomenarem l'*aplicació de Gauss de  $S$* .

Observem que  $T_p S = T_{N(p)} \mathbb{S}^2$  i que, per tant, la diferencial de l'aplicació de Gauss en un punt  $p \in S$  defineix una aplicació lineal

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_p S.$$

La diferencial  $dN_p$  codifica la variació del vector normal en totes les direccions tangents a  $S$  en  $p$  i aquesta variació es llegeix al propi espai tangent. Podem observar aquest mateix fet de la forma següent: si  $\alpha(t)$  és una corba de  $S$  que passa per  $p$ , aleshores

$$\langle N(\alpha(t)), N(\alpha(t)) \rangle = 1 \implies \langle (N\alpha)'(0), N(\alpha(0)) \rangle = 0,$$

és a dir, la variació de  $N$  al llarg de  $\alpha$  és ortogonal a  $N$  i, per tant, tangent a  $S$ .

A  $-dN$  l'anomenarem l'*aplicació de Weingarten de  $S$* . (Es pren el signe negatiu per raons que veurem més endavant.)

Els invariants d'una aplicació lineal ens donen informació sobre la pròpia aplicació. En particular, el determinant i la traça.

**3.2.1 Definició.** Es defineixen la *curvatura de Gauss* i la *curvatura mitjana* de  $S$  en  $p$  segons

$$K(p) = \det dN_p, \quad H(p) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} dN_p.$$

**3.2.2 Teorema.** L'endomorfisme  $dN_p : T_p S \longrightarrow T_p S$  és un endomorfisme simètric. En particular,  $dN_p$  diagonalitza en una base ortonormal.

*Demostració.* Que  $dN$  sigui simètric significa que per a qualssevol vectors  $v, w \in T_p S$  se satisfà

$$\langle dN(v), w \rangle = \langle v, dN(w) \rangle.$$

És suficient comprovar aquesta igualtat per als vectors d'una base: fixem un sistema de coordenades positiu  $\varphi$  al voltat de  $p$  i considerem la base de l'espai tangent associada,  $(\varphi_u, \varphi_v)$ . Basta veure que  $\langle dN(\varphi_u), \varphi_v \rangle = \langle \varphi_u, dN(\varphi_v) \rangle$ .

Derivant la igualtat  $\langle N, \varphi_v \rangle = 0$  respecte de  $u$  trobem

$$\langle N_u, \varphi_v \rangle + \langle N, \varphi_{uv} \rangle = 0 \implies \langle dN(\varphi_u), \varphi_v \rangle = -\langle N, \varphi_{uv} \rangle.$$

De forma similar trobem

$$\langle \varphi_u, dN(\varphi_v) \rangle = -\langle N, \varphi_{vu} \rangle,$$

i com  $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$ , pel teorema de Schwarz, acabem la prova. ■

**3.2.3 Definició.** Els vectors propis  $e_1, e_2$  de  $-dN_p$  i les direccions del pla tangent que determinen, les anomenarem *direccions principals*. Els valors propis de  $-dN_p$  els denotarem per  $k_1, k_2$  i els anomenarem les *curvatures principals* de  $S$  en  $p$ .

De la definició de  $K$  i  $H$  i les curvatures principals en resulta que  $K = k_1 k_2$  i  $H = (k_1 + k_2)/2$ , amb la qual cosa es té:

**3.2.4 Corol·lari.** *Les curvatures principals són les solucions de l'equació*

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

i, per tant,

$$k_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Observem que  $K, H, k_1$  i  $k_2$  defineixen funcions diferenciables a  $S$ .

### 3.3 La segona forma fonamental

Seguim amb les notacions de la secció anterior. A tot endomorfisme simètric se li associa una forma quadràtica:

**3.3.1 Definició.** La *segona forma quadràtica de  $S$  en  $p$*  és la forma quadràtica  $\mathbb{I}_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  definida per

$$\mathbb{I}_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle, \quad \forall w \in T_p S.$$

La matriu de  $\mathbb{I}_p$  en una base  $w_1, w_2$  de  $T_p S$  ve donada per

$$-\begin{pmatrix} \langle dN_p(w_1), w_1 \rangle & \langle dN_p(w_1), w_2 \rangle \\ \langle dN_p(w_2), w_1 \rangle & \langle dN_p(w_2), w_2 \rangle \end{pmatrix}.$$

Els sistemes de coordenades donen bases naturals de l'espai tangent,  $(\varphi_u, \varphi_v)$ ; calculem la matriu de  $\mathbb{I}_p$  corresponent: sigui  $\varphi : U \rightarrow S$  una parametrització regular positiva amb  $p \in \varphi(U)$ , i denotem per

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \langle dN_p(\varphi_u), \varphi_u \rangle & \langle dN_p(\varphi_u), \varphi_v \rangle \\ \langle dN_p(\varphi_v), \varphi_u \rangle & \langle dN_p(\varphi_v), \varphi_v \rangle \end{pmatrix}$$

la matriu de la segona forma fonamental en aquesta base.

**3.3.2 Proposició.** *Amb les notacions anteriors, se satisfà*

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \varphi_u \rangle = \langle N, \varphi_{uu} \rangle = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ f &= -\langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle N, \varphi_{uv} \rangle = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ g &= -\langle N_v, \varphi_v \rangle = \langle N, \varphi_{vv} \rangle = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned}$$

*Demostració.* La demostració d'aquestes igualtats és immediata. Provem, per exemple, les corresponents a  $f$ :

$$\langle N, \varphi_v \rangle = 0 \text{ i derivant } \frac{\partial}{\partial u} \implies \langle N, \varphi_{uv} \rangle + \langle N_u, \varphi_v \rangle = 0.$$

La darrera igualtat se segueix de que  $N = (\varphi_u \wedge \varphi_v) / \sqrt{EG - F^2}$ . ■

Veiem doncs que tant la segona forma fonamental com la primera forma fonamental es calculen fàcilment a partir de les equacions que defineixen un sistema de coordenades. Podem utilitzar aquest fet per calcular explícitament la matriu de l'aplicació de Weingarten en la base  $\varphi_u, \varphi_v$ . En efecte, si l'aplicació  $dN$  té matriu

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\varphi_u + a_{12}\varphi_v, \\ N_v &= a_{21}\varphi_u + a_{22}\varphi_v, \end{aligned}$$

segons la proposició anterior trobem

$$\begin{aligned} -e &= a_{11}E + a_{12}F & -g &= a_{21}E + a_{22}F \\ -f &= a_{11}F + a_{12}G & -f &= a_{21}F + a_{22}G \end{aligned} \quad \text{i}$$

és a dir,

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Transposant aquesta darrera igualtat i aïllant la matriu de  $dN$ , trobem

### 3.3.3 Equacions de Weingarten.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Observem que podem resumir les equacions anteriors en la forma

$$dN = -I^{-1} \cdot II,$$

en el ben entès que aquesta és una igualtat de matrius.

### 3.3.4 Corol·lari. De les equacions de Weingarten es dedueix que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2}. \quad \blacksquare$$

Acabem aquesta secció donant la classificació dels punts de la superfície  $S$  segons els valors de les curvatures principals.

**3.3.5 Definició.** Direm que  $p \in S$  és

- *el·líptic* si  $K(p) > 0$ . Equivalentment, si  $k_1(p), k_2(p) \neq 0$ , amb el mateix signe.
- *hiperbòlic* si  $K(p) < 0$ . Equivalentment, si  $k_1(p), k_2(p) \neq 0$ , de signes oposats.
- *parabòlic* si  $K(p) = 0, H(p) \neq 0$ . Equivalentment, si  $k_1(p) \neq 0, k_2(p) = 0$ .
- *pla* si  $K(p) = 0, H(p) = 0$ . Equivalentment,  $k_1(p), k_2(p) = 0$ .

**3.3.6** La classificació anterior té l'origen en la cònica del pla tangent a  $S$  en  $p$  associada a la segona forma fonamental

$$II_p(w) = \pm 1, \quad w \in T_p S,$$

que s'anomena la *indicatriu de Dupin* de  $S$  en  $p$ . Observem que si  $e_1, e_2$  són les direccions principals de  $S$  en  $p$ , és a dir, formen la base ortonormal en la qual  $dN_p$  diagonalitza, i  $w = xe_1 + ye_2$ , aleshores la indicatriu de Dupin és

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 = \pm 1.$$

Així, si  $k_1, k_2$  tenen el mateix signe, en resulta una el·lipse, si tenen signes oposats en resulten dues hipèrboles, o si  $k_2 = 0$ , en resulten dues rectes paral·leles.

## 3.4 Corbes sobre una superfície

Sigui  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superfície orientada per un camp normal unitari  $N$  i  $p \in S$ . Una manera d'analitzar la curvatura de  $S$  en  $p$  és estudiar la curvatura de les corbes que s'obtenen tallant  $S$  per un pla que passa per  $p$ . Aquesta era la manera de procedir en el període previ a la introducció de la curvatura de Gauss. Més generalment, anem a analitzar la curvatura d'una corba qualsevol de  $S$  en  $p$  en relació als elements característics de la superfície, el pla tangent i el vector normal.

Sigui  $\alpha : I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  una corba regular, parametritzada per l'arc, amb  $\alpha(0) = p$ . Per la definició de la curvatura de  $\alpha$ ,  $\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$ . Descomposem aquest vector en les seves components normal i tangencial

$$\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n} = \kappa \langle \mathbf{n}, N \rangle N + \kappa \langle \mathbf{n}, N \wedge \mathbf{t} \rangle N \wedge \mathbf{t}.$$

**3.4.1 Definició.** Es defineixen les *curvatures normal i geodèsica* de  $\alpha$  en  $p$  per

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \kappa \langle \mathbf{n}, N \rangle, \\ \kappa_g &= \kappa \langle \mathbf{n}, N \wedge \mathbf{t} \rangle. \end{aligned}$$



Observem que ambdues curvatures tenen signe, com succeïa per la curvatura de corbes planes, que depèn de l'orientació de la superfície, això és, del vector normal  $N$ . Per la pròpia definició, es té

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2.$$

**3.4.2 Proposició.** *Si  $\alpha$  està parametritzada per l'arc, aleshores*

$$\kappa_n = \mathbb{I}_p(\alpha'(0)).$$

*Demostració.* Com  $\alpha'(s)$  és un vector tangent, es té  $\langle N(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0$ . Derivant, avaluant a  $s = 0$  i usant les fórmules de Frenet, obtenim

$$\langle dN(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle + \langle N(\alpha(0)), \kappa \mathbf{n}(0) \rangle = 0$$

que és el què volíem provar. ■

Si el paràmetre no és l'arc, podem calcular la curvatura normal de  $\alpha$  en  $p$  en la forma

$$\kappa_n = \mathbb{I}_p \left( \frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|} \right) = \frac{\mathbb{I}_p(\alpha'(0))}{I_p(\alpha'(0))}.$$

De la proposició anterior se segueix que la curvatura normal no depèn de la corba  $\alpha$  sinó només del vector tangent  $w = \alpha'(0)$ . Dit altrament:

**3.4.3 Teorema de Meusnier.** *Dues corbes de  $S$  que passen per  $p$  i tenen el mateix vector tangent, tenen la mateixa curvatura normal en  $p$ .* ■

Observem que la curvatura normal en la direcció tangent  $w \in T_p S$  és la curvatura de la secció de  $S$  tallada pel pla  $p + [w, N]$ . Podem interpretar aquest resultat dient que la curvatura normal mesura la part de la curvatura de la corba produïda per la curvatura de la superfície, mentre que, com veurem més endavant, la curvatura geodèsica mesurarà la curvatura de la corba *dins* de la superfície.

Un altre resultat clàssic que es deriva immediatament de la darrera proposició és la fórmula d'Euler.

**3.4.4 Fórmula d'Euler.** *Siguin  $k_1, k_2$  les curvatures principals de  $S$  en  $p$  i  $e_1, e_2$  les direccions principals corresponents. Si  $w = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \in T_p S$ , aleshores*

$$\kappa_n(w) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

*Demostració.* En la base ortonormal  $e_1, e_2$  l'aplicació lineal  $-dN$  diagonalitza, amb valors propis  $k_1, k_2$ , per la qual cosa

$$\kappa_n(w) = \mathbb{I}_p(w) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \quad \blacksquare$$

**3.4.5 Corol·lari.** *Amb les notacions anteriors, suposem que  $k_1(p) \geq k_2(p)$ . Aleshores,*

$$\begin{aligned} k_1 &= \max \{ \kappa_n(w) \mid w \in T_p S, |w| = 1 \}, \\ k_2 &= \min \{ \kappa_n(w) \mid w \in T_p S, |w| = 1 \}. \end{aligned}$$

Acabem la secció analitzant dues famílies distingides de corbes sobre una superfície: les línies de curvatura i les línies asimptòtiques. En tot el què segueix  $S \subset \mathbb{R}^3$  és una superfície regular orientada i  $\varphi : U \rightarrow S$  és una parametrització regular positiva.

#### *Línies de curvatura.*

**3.4.6 Definició.** Direm que  $\alpha : I \rightarrow S$  és una *línia de curvatura* si  $\alpha'(t)$  és una direcció principal per a tot  $t \in I$ .

De la definició es desprèn el resultat següent:

**3.4.7 Teorema de Rodrigues.**  $\alpha(t)$  és línia de curvatura de  $S$  si, i només si, existeix una funció diferenciable  $\lambda(t)$  tal que

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

*Demostració.* Hem escrit  $N'(t)$  per  $(N\alpha)'(t) = dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$ . La prova resulta immediatament de la definició. Per exemple, si  $\alpha$  és línia de curvatura,  $\alpha'(t)$  és una direcció principal per a tot  $t \in I$ , i existirà  $\lambda(t)$  amb  $N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$ . ■

**3.4.8 Definició.** Direm que un punt  $p \in S$  és *umbilical* si  $k_1(p) = k_2(p)$ .

Un punt umbilical té les curvatures principals iguals i, per tant, les curvatures normals en aquest punt són totes iguals a un cert valor  $k$ . Dit altrament, la diferencial de l'aplicació de Gauss és una homotècia,  $dN_p = k \cdot \text{id}$ . Així, si tots els punts de  $S$  són umbilicals, totes les corbes són línies de curvatura. Aquesta situació només es dona al pla o a les esferes, com mostrem a continuació.

**3.4.9 Proposició.** *Suposem que  $S$  és connexa i que tots els punts són umbilicals. Aleshores,  $S$  és un troç de pla o d'esfera.*

*Demostració.* Situem-nos a l'entorn coordinat  $\varphi$ . Com  $dN$  és una homotècia en tots els punts, existeix una funció  $\lambda(u, v)$  tal que

$$N_u = \lambda\varphi_u, \quad N_v = \lambda\varphi_v.$$

Derivant respecte de  $v$  i  $u$ , trobem

$$0 = N_{uv} - N_{vu} = \lambda_v \varphi_u - \lambda_u \varphi_v,$$

i com  $\varphi_u, \varphi_v$  formen base del pla tangent, trobem que  $\lambda_u = 0 = \lambda_v$ . Així, si l'obert  $U$  és connex,  $\lambda$  és constant. Per la connexió de  $S$ , deduïm que  $\lambda$  és constant a tota la superfície  $S$ .

Distingim ara dos casos, segons que  $\lambda = 0$  o  $\lambda \neq 0$ .

$\lambda = 0$ : en aquest cas  $N_u = \lambda \varphi_u = 0$  i, anàlogament,  $N_v = 0$ . Així, usant una altra vegada la connexió,  $N$  és un vector constant i  $S$  està continguda en un pla ortogonal a  $N$ .

$\lambda \neq 0$ : considerem la funció  $\psi(u, v) = \varphi(u, v) - \frac{1}{\lambda} N$ . Derivant i usant la connexió de  $S$  veiem que  $\psi$  és constant, ja que

$$\psi_u = \varphi_u - \frac{1}{\lambda} N_u = \varphi_u - \frac{1}{\lambda} \lambda \varphi_u = 0,$$

i, anàlogament,  $\psi_v = 0$ . Sigui  $q = \psi(u, v)$  el punt de  $\mathbb{R}^3$  que determina. Aleshores,  $S$  està continguda a l'esfera de centre  $q$  i radi  $1/\lambda$ , ja que  $|\varphi(u, v) - q| = 1/\lambda$ . ■

Per acabar amb les línies de curvatura, estudiem l'equació diferencial que satisfan les components  $(u(t), v(t))$  en el sistema coordenat  $\varphi$ .

**3.4.10 Equació diferencial de les línies de curvatura.**  $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$  és una línia de curvatura si, i només si, satisfà l'equació diferencial

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

*Demostració.* Pel teorema de Rodrigues,  $\alpha$  és una línia de curvatura si, i només si, els vectors

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

són linealment dependents. Recordem que la matriu de  $dN$  pot calcular-se a partir de les matrius de la primera i segona formes fonamentals segons les equacions de Weingarten, de manera que

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix},$$

amb la qual cosa trobem, després de fer un càlcul elemental, que els vectors  $dN(\alpha')$ ,  $\alpha'$  són linealment dependents si, i només si,

$$\begin{vmatrix} Eu' + Fv' & eu' + fv' \\ Fu' + Gv' & fu' + gv' \end{vmatrix} = 0.$$

El lector comprovarà sense dificultat que l'equació que en resulta és equivalent a la descrita a l'enunciat d'aquesta proposició. ■

**3.4.11 Corol·lari.** (1) Si  $F = f = 0$ , aleshores les corbes coordinades són línies de curvatura.

(2) Si  $S$  no té punts umbilicals i les corbes coordinades són línies de curvatura, aleshores  $F = 0 = f$ . ■

#### *Línies asimptòtiques.*

**3.4.12 Definició.** Direm que una corba regular  $\alpha : I \rightarrow S$  és una *línia asimptòtica* si  $\kappa_n = 0$  en tot els punts.

Per tal que una superfície contingui línies asimptòtiques cal que hi hagi punts on  $K \leq 0$ , és a dir, si tots els punts de  $S$  són el·líptics, aleshores  $S$  no conté línies asimptòtiques. D'altra banda, en una regió d'una superfície en què tots els punts són plans, tota corba és asimptòtica.

Observem també que tota recta continguda en  $S$  és una línia asimptòtica.

Com la curvatura normal de  $\alpha$  es calcula mitjançant la segona forma fonamental, de la definició de línia asimptòtica es desprèn immediatament:

**3.4.13 Proposició.** *Segui  $\alpha : I \rightarrow S$  una corba regular, són equivalents*

(1)  $\alpha$  és una línia asimptòtica.

(2)  $\langle \alpha'(t), N'(t) \rangle = 0$ , per a tot  $t \in I$ .

(3)  $\langle \alpha''(t), N(t) \rangle = 0$ , per a tot  $t \in I$ . ■

**3.4.14 Equació diferencial de les línies asimptòtiques.**  $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$  és una línia asimptòtica si, i només si, satisfà l'equació diferencial

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0. \quad \blacksquare$$

**3.4.15 Corol·lari.** Les corbes coordinades són línies asimptòtiques si, i només si,  $e = 0 = g$ . ■

## 3.5 El teorema egregi de Gauss

En aquesta secció anem a provar el celebrat teorema egregi de Gauss segons el qual la curvatura de Gauss d'una superfície és invariant per isometries, és a dir, és una propietat intrínseca de la superfície. Observem que aquest fet no és immediat i que en certa manera és sorprenent, ja que la curvatura s'ha definit a partir de la variació del vector normal i, per tant, aparentment depèn de la immersió de la superfície a l'espai  $\mathbb{R}^3$ .

La demostració d'aquest resultat se seguirà de l'anàlisi de la variació del triedre associat a una parametrització regular a l'estil del què havíem fet en el cas de corbes i les fórmules de Frenet. Aquesta anàlisi la completarem en la secció següent, establint el teorema fonamental de la teoria local de superfícies.

**3.5.1** Sigui  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superfície orientada i  $\varphi : U \rightarrow S$  una parametrització positiva. En els punts de  $\varphi(U)$  considerarem el triedre associat,

$$\varphi_u, \varphi_v, N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|},$$

que és una base positiva de  $\mathbb{R}^3$  en cada punt. Volem analitzar la variació d'aquest triedre en funció dels paràmetres  $(u, v)$  i, per fer-ho, analitzarem les derivades corresponents  $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}, N_u, N_v$ . Escrivint en termes del triedre associat, hi haurà funcions  $\Gamma_{ij}^k$  tals que

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + eN \\ \varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + fN \\ \varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + gN \\ N_u &= a_{11} \varphi_u + a_{12} \varphi_v, \\ N_v &= a_{21} \varphi_u + a_{22} \varphi_v. \end{aligned}$$

A les funcions  $\Gamma_{ij}^k$  les anomenarem els *símbols de Christoffel* de la parametrització  $\varphi$ .

Observem que les components normals de  $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}$  són  $e, f, g$  per la pròpia definició de la segona forma fonamental, i que els coeficients  $a_{ij}$  es calculen a partir de la primera i segona formes fonamentals mitjançant les equacions de Weingarten.

**3.5.2 Proposició.** *Els símbols de Christoffel són intrínsecs, és a dir, es poden calcular a partir dels coeficients de la primera forma fonamental.*

*Demostració.* Si multipliquem escalarment per  $\varphi_u, \varphi_v$  les equacions que defineixen els

símbols de Christoffel trobem tres sistemes lineals

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= F_u - \frac{1}{2} E_v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \frac{1}{2} G_u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \frac{1}{2} G_v\end{aligned}$$

tots ells amb determinant  $EG - F^2 > 0$ , amb la qual cosa són sistemes compatibles i determinats, és a dir, determinen els símbols  $\Gamma_{ij}^k$  unívocament. ■

**3.5.3** És clar que podem donar fórmules explícites, via la regla de Cràmer, per resoldre els sistemes lineals de la prova de la proposició anterior. Ho fem en un cas especialment senzill i que és força útil, aquell en el qual les corbes coordenades són ortogonals, és a dir,  $F = 0$ . En aquest cas trobem

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{E_u}{E}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2} \frac{E_v}{G}, & a_{11} &= -\frac{e}{E}, & a_{21} &= -\frac{f}{G}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \frac{E_v}{E}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \frac{G_u}{G}, & a_{12} &= -\frac{f}{E}, & a_{22} &= -\frac{g}{G}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{G_u}{E}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \frac{G_v}{G},\end{aligned}$$

**3.5.4** El teorema de Schwarz segons el qual les derivades parcials d'una funció diferenciable no depenen de l'ordre en què s'hagin fet aquestes derivades, imposa certes relacions entre els símbols de Christoffel. En efecte, se satisfan les igualtats

$$\begin{aligned}(\varphi_{uu})_v &= (\varphi_{uv})_u, \\ (\varphi_{vv})_u &= (\varphi_{uv})_v, \\ (N_u)_v &= (N_v)_u,\end{aligned}$$

igualtats que anomenarem *equacions de compatibilitat*. Escrivint aquestes igualtats en el triedre associat,

$$\begin{aligned}(\varphi_{uu})_v - (\varphi_{uv})_u &= A_1 \varphi_u + B_1 \varphi_v + C_1 N = 0, \\ (\varphi_{vv})_u - (\varphi_{uv})_v &= A_2 \varphi_u + B_2 \varphi_v + C_2 N = 0, \\ (N_u)_v - (N_v)_u &= A_3 \varphi_u + B_3 \varphi_v + C_3 N = 0,\end{aligned}$$

en resulten 9 equacions,  $A_i = 0, B_i = 0, C_i = 0, 1 \leq i \leq 3$ . Utilitzant les definicions i les equacions de Weingarten, és un exercici comprovar que cadascuna d'aquestes 9

equacions admet una expressió en termes de la primera forma fonamental, dels símbols de Christoffel i de la segona forma fonamental. En particular, l'equació  $B_1 = 0$  es converteix en la

### 3.5.5 Fórmula de Gauss.

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -EK.$$

I com  $E \neq 0$ , en resulta

$$K = -\frac{1}{E}((\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2).$$

És a dir, veiem que la curvatura de Gauss  $K$  es calcula a partir de la primera forma fonamental i les seves derivades, d'on resulta:

### 3.5.6 Teorema egregi de Gauss. *La curvatura de Gauss és intrínseca.* ■

Podem precisar el teorema egregi en la forma següent,

**3.5.7 Teorema.** *Sigui  $f : S \longrightarrow S'$  una isometria local entre superfícies regulars orientables de  $\mathbb{R}^3$ . Aleshores, punts corresponents tenen la mateixa curvatura, això és*

$$K_S(p) = K_{S'}(f(p)). \quad \blacksquare$$

Remarquem que el recíproc no és cert, és a dir, existeixen aplicacions diferenciables  $f : S \longrightarrow S'$  tals que  $K_S(p) = K_{S'}(f(p))$ , però que no són isometries locals. No obstant, en els propers capítols veurem resultats positius quan les curvatures siguin constants.

Com a conseqüència del teorema egregi, si una superfície  $S$  és localment isomètrica a una regió del pla, aleshores la curvatura de Gauss de  $S$  ha de ser idènticament nul·la. Per tant, no hi ha cap isometria local entre una regió de l'esfera i una regió del pla. Dit altrament, els cartògrafs han de conviure amb el fet de què no és possible dibuixar mapes geogràfics que conservin les distàncies, (ni que les conservin llevat d'un factor d'escala).

**3.5.8 Anotació històrica.** Gauss va publicar les *Disquisitiones generales circa superficies curvas* l'any 1827. Aquest treball va suposar un canvi de paradigma en l'estudi de la geometria de superfícies, introduint la curvatura i demostrant, entre d'altres, el teorema egregi. Gauss no escriu els símbols de Christoffel, sinó que troba la fórmula

que duu el seu nom per càlcul directe. En el treball original trobem la següent expressió d'aquesta formula

$$\begin{aligned} 4(EF - F^2)K = & E(E_v G_v - 2F_u G_v + G_u^2) \\ & + F(E_u G_v - E_v G_u - 2E_v F_v + 4F_u F_v - 2F_u G_v) \\ & + G(E_u G_u - 2E_u F_v + E_v^2) \\ & - 2(EG - F^2)(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}), \end{aligned}$$

a partir de la qual, escriu:

*Formula itaque articuli praecedentis sponte perducit ad egregium*

*THEOREMA. Si superficies curva in quacunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.*

### 3.6 El teorema fonamental de la teoria local de supefícies

Continuem l'anàlisi de les equacions de compatibilitat, les equacions  $C_1 = 0$  i  $C_2 = 0$  són:

#### 3.6.1 Equacions de Codazzi-Mainardi.

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \\ f_v - g_u &= e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2, \end{aligned}$$

Aquestes equacions admeten una expressió més simple si les corbes coordenades són línies de curvatura, és a dir, si  $F = 0 = f$ :

$$e_v = \frac{E_v}{2} \left( \frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right), \quad g_u = \frac{G_u}{2} \left( \frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right).$$

El següent resultat, conegut també com a teorema de Bonnet, desmota que la resta d'equacions de compatibilitat se segueixen de les tres ja establertes, la fórmula de Gauss i les dues de Codazzi-Mainardi.

**3.6.2 Teorema fonamental de la teoria de superfícies.** *Siguin  $E, F, G, e, f, g$  funcions diferenciables en un obert  $V \subset \mathbb{R}^2$  tals que*

$$E > 0, \quad G > 0, \quad EG - F^2 > 0,$$



*i tals que satisfan les equacions de Gauss i de Codazzi-Mainardi. Aleshores, per a tot  $q \in V$  existeix un entorn  $q \in U \subset V$  i un difeomorfisme*

$$\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^3,$$

*tal que  $S = \varphi(U)$  és una superfície regular que té les funcions  $E, F, G, e, f, g$  com a coeficients de la primera i segona formes fonamentals.*

*A més, si  $U$  és un obert connex i  $\psi : U \longrightarrow \psi(U) \subset \mathbb{R}^3$  és una altra solució del problema, aleshores hi ha un moviment directe de  $\mathbb{R}^3$  que transforma  $\psi(U)$  en  $\varphi(U)$ .*



## Algunes superfícies notables

En aquest capítol presentem tres famílies notables de superfícies de l'espai  $\mathbb{R}^3$ : les superfícies de revolució, les superfícies reglades i les superfícies minimals. Algunes d'aquestes superfícies ja han aparegut en capítols anteriors i bona part dels càlculs que ara reproduïrem es desenvolupen en les sessions de problemes de l'assignatura. Els recollim aquí per a referència en capítols posteriors.

### 4.1 Superfícies de revolució

Una superfície de revolució és una superfície que s'obté al fer girar una corba plana  $C$  al voltant d'una recta del pla que no talla la corba. Per precisar aquesta definició, suposarem que el pla és el pla  $XZ$  i que l'eix de gir és l'eix  $OZ$ .

Sigui  $\alpha(v)$  una corba plana regular, sense autointerseccions i tal que  $\alpha : I \rightarrow \alpha(I)$  és un homeomorfisme (el què resumirem dient que  $\alpha$  és un *arc de Jordan*). Suposem que  $\alpha$  no talla l'eix  $OZ$ :

$$x = r(v), \quad z = z(v), \quad a < v < b, \quad r(v) > 0.$$

**4.1.1 Definició.** La *superfície de revolució* definida per la corba  $\alpha$  en girar al voltant de l'eix  $OZ$  és

$$S = \{(r(v) \cos u, r(v) \sin u, z(v)) \mid a < v < b, 0 \leq u \leq 2\pi\}.$$

A les corbes  $u = \text{cnt}$  les anomenarem *meridians*, mentre que a les  $v = \text{cnt}$  les anomenarem *paralels* de  $S$ .

Ens proposem veure que una superfície de revolució és una superfície regular. Per

fer-ho, considerem les aplicacions

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= (r(v) \cos u, r(v) \sin u, z(v)), & 0 < u < 2\pi, & a < v < b, \\ \psi(u, v) &= (r(v) \cos u, r(v) \sin u, z(v)), & -\pi < u < \pi, & a < v < b.\end{aligned}$$

**4.1.2 Lema.**  $\varphi, \psi$  són parametritzacions regulars que cobreixen  $S$  i, per tant,  $S$  és una superfície regular.

*Demostració.* És clar que  $\varphi$  i  $\psi$  cobreixen  $S$ , per la qual cosa basta veure que són parametritzacions regulars per concloure que  $S$  és una superfície regular.

Comprovem-ho per  $\varphi$ , ja que l'anàlisi per a  $\psi$  és totalment anàleg. Per definició,  $\varphi$  és diferenciable, hem de provar que (i) és un homeomorfisme amb la seva imatge i (ii) el rang de la diferencial és 2 en tots els punts de la variació dels paràmetres.

(i) Comencem observant que  $\varphi$  és injectiva ja que, elevant a quadrat les dues primeres components i tenint present que  $r > 0$ ,

$$\varphi(u, v) = \varphi(u', v') \implies r(v) = r(v'), \quad z(v) = z(v') \implies v = v',$$

ja que la corba  $\alpha$  no té autointerseccions. Però, aleshores,  $\cos u = \cos u', \sin u = \sin u'$  i, com  $u, u' \in (0, 2\pi)$ , trobem que  $u = u'$ .

Pel que fa a la continuïtat de la inversa,  $\varphi^{-1}$ , observem que si  $u \neq \pi/2$ , aleshores

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = \frac{\sin u}{1 + \cos u} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \implies u = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

mentre que a prop de  $u = \pi/2$  podem recuperar  $u$  en la forma

$$u = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pel que fa a  $v$ , es té  $(r(v), z(v)) = (\sqrt{x^2 + y^2}, z)$  i podem recuperar  $v$  de forma contínua ja que  $\alpha$  és un arc de Jordan.

(ii) Si calculem els vectors tangents a les corbes coordenades trobem

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (-r(v) \sin u, r(v) \cos u, 0), \\ \varphi_v &= (-r'(v) \cos u, r'(v) \sin u, z'(v)),\end{aligned}$$

i, per tant,

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (r(v)z'(v) \cos u, r(v)z'(v) \sin u, -r(v)r'(v)).$$

Veiem que aquest vector no s'anul·la mai, ja que  $r(v) > 0$  i  $r'(v), z'(v)$  no s'anul·len simultàniament perquè  $\alpha(v)$  és una corba regular. ■

**4.1.3 Observació.** En el raonament anterior hem considerat corbes  $\alpha(v) = (r(v), z(v))$  que són arcs de Jordan del pla. A més, hem pogut completar el raonament perquè hem suposat que la corba no té punts en comú amb l'eix de gir. Podem ampliar l'espectre de corbes que defineixen superfícies de revolució segons els dos criteris següents:

(1) Corbes tancades de Jordan que no tallen l'eix de gir, com per exemple, una circumferència situada en un dels semiplans definits per l'eix de gir. En aquest cas, bastarà cobrir la corba amb dos arcs de Jordan i raonar sobre les superfícies generades per cadascun dels arcs. S'obté així, per exemple, el tor quan es fa girar una circumferència de radi  $r$  centrada al punt  $(a, 0)$  del pla, amb  $0 < r < a$ .

(2) Si la corba talla l'eix de gir i és simètrica respecte d'aquest eix, aleshores es pot veure que la superfície de revolució corresponent és regular. Així, per exemple, si fem girar una circumferència al voltant d'un diàmetre, obtenim una esfera.

**4.1.4 Proposició.** *La primera i segona formes fonamentals de la superfície de revolució  $S$  en la parametrització  $\varphi$  vénen donades per*

$$I = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (r')^2 + (z')^2 \end{pmatrix}, \quad II = \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + (z')^2}} \begin{pmatrix} -rz' & 0 \\ 0 & r''z' - r'z'' \end{pmatrix}$$

*Demostració.* Aquestes expressions es calculen fàcilment a partir de les fórmules per la primera i segona formes fonamentals presentades en el capítol anterior, i les deixem com exercici. ■

Com  $F = 0 = f$ , es dedueix:

**4.1.5 Corol·lari.** *Els meridians i paral·lels d'una superfície de revolució són línies de curvatura de la superfície.* ■

**4.1.6** A més a més, podem calcular fàcilment les curvatures principals, la curvatura de Gauss i la curvatura mitjana, que en resulten:

$$\begin{aligned} k_{\text{meridians}} &= \frac{g}{G} = \frac{r''z' - r'z''}{((r')^2 + (z')^2)^{3/2}}, \\ k_{\text{paral·lels}} &= \frac{e}{E} = -\frac{z'}{r((r')^2 + (z')^2)^{3/2}}, \\ K &= -\frac{z'(r''z' - r'z'')}{r((r')^2 + (z')^2)^2} \\ H &= -\frac{r(r'z'' - z'r'') + z'((r')^2 + (z')^2)}{2r((r')^2 + (z')^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

**4.1.7 Observacions.** El vector normal a la superfície de revolució és

$$N = \frac{1}{\sqrt{r'(v)^2 + z'(v)^2}}(z'(v) \cos u, z'(v) \sin u, r'(v)).$$

(1) Observeu que al llarg dels meridians se satisfà  $\mathbf{n} = \pm N$  i que la curvatura d'aquests meridians no és altra que la curvatura de la corba plana  $\alpha(v)$ .

(2) Pel que fa als paral·lels, el vector normal  $N$  fa un angle constant al llarg dels paral·lels amb l'eix de gir,  $OZ$ .

**4.1.8** Les fórmules anteriors se simplifiquen notablement si la corba  $\alpha(v)$  està parametritzada per l'arc. En aquest cas,  $(r')^2 + (z')^2 = 1$  i derivant aquesta expressió veiem que  $z'z'' = -r'r''$ ; així, en resulten les fórmules

$$\begin{aligned} K &= -\frac{r''}{r}, \\ H &= \frac{1}{2} \frac{-z' + r(z'r'' - z''r')}{r}. \end{aligned}$$

**4.1.9 Exemples.** (1) En el tor corresponent a  $r(v) = a + r \cos v$ ,  $z(v) = r \sin v$ ,  $0 < r < a$ , la curvatura de Gauss ve donada per

$$K = \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)},$$

d'on se segueix que la curvatura és zero al llarg dels paral·lels  $v = \pi/2, 3\pi/2$ , els punts dels quals seran parabòlics. Veiem també que  $K < 0$  en la regió  $\pi/2 < v < 3\pi/2$ , que estarà formada per punts hiperbòlics; i que  $K > 0$  en la resta de punts, que són punts el·líptics.

(2) La *catenoide* és la superfície de revolució que s'obté quan fem girar una catenària al voltant d'una recta. La catenària té equacions

$$x = r(z) = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right), \quad z = z,$$

i substituint en les fórmules anteriors trobem que

$$K = -\frac{1}{a^2 \cosh^4\left(\frac{z}{a}\right)}, \quad H = 0.$$

De l'expressió anterior deduïm que la curvatura és mínima per a  $z = 0$ ,  $K = -1/a^2$ , i que tendeix a zero quan ens allunyem de l'origen,  $z \rightarrow \pm\infty$ .

(3) La *pseudoesfera* és la superfície de revolució generada per la tautriu. Més concretament, la superfície de revolució generada per la corba

$$(r(v), z(v)) = (\sin v, \cos v + \ln(\operatorname{tg} \frac{v}{2})), \quad 0 < v < \pi/2.$$

Substituint en la fórmula de la curvatura de Gauss de 4.1.6, trobem  $K \equiv -1$ . És a dir, és una superfície regular de curvatura constant negativa.

Observem que, suposant que la corba està parametritzada per l'arc, les superfícies de revolució de curvatura constant satisfan l'equació diferencial

$$r'' + Kr = 0.$$

Analitzant les diferents solucions d'aquesta *edo* lineal d'ordre 2 segons que  $K$  sigui positiva, negativa o zero, podem classificar totes les superfícies de revolució de curvatura constant. Ho farem amb detall al capítol 7.

## 4.2 Superfícies reglades

Es defineixen les superfícies reglades com aquelles generades per una família (uniparamètrica) de rectes que es recolzen en una corba  $\alpha(u)$ . Per exemple, la superfície generada per les rectes que passen pel punt  $(0, 0, 1)$  i es recolzen en la circumferència  $z = 0, x^2 + y^2 = 1$  generen un con de  $\mathbb{R}^3$ . En aquest exemple veiem que generant superfícies mitjançant una família de rectes es poden produir singularitats, com el vèrtex del con, per la qual cosa precisem la definició de superfície reglada demanant, tant sols, que sigui una superfície *parametritzada*, no necessàriament regular. Més concretament:

**4.2.1 Definició.** Sigui  $\alpha(u), a < u < b$  una corba regular i  $\mathbf{w}(u)$  una família de vectors no nuls que depenen de  $u$ . La *superfície reglada* associada a  $\alpha$  i  $\mathbf{w}$  és la superfície parametritzada definida per l'aplicació

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{w}(u), \quad a < u < b, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Les corbes coordenades  $u = \text{cnt}$  (és a dir, les rectes  $L_{u_0}$  de punt de pas  $\alpha(u_0)$  i vector director  $\mathbf{w}(u_0)$ ) són les *generatrius* de la superfície reglada i  $\alpha$  és la *directriu*.

**4.2.2 Observació.** Observem que en una superfície reglada se satisfà

$$\varphi_{vv} = 0, \quad \mathbf{w}(u) = \varphi_v(u, 0), \quad \alpha(u) = \varphi(u, 0).$$

Recíprocament, si una superfície parametritzada  $\varphi$  satisfà

$$\varphi_{vv} = 0 \quad \text{i} \quad G(u, 0) \neq 0, \quad \forall u,$$

aleshores prenent  $\alpha(u) = \varphi(u, 0)$  i  $\mathbf{w}(u) = \varphi_v(u, 0)$ ,  $\varphi$  és una superfície reglada.

**4.2.3 Exemple.** El cilindre  $x^2 + y^2 = 1$  és la superfície reglada generada per les rectes paral·leles a l'eix  $OZ$  que passen pels punts de la circumferència unitat del pla  $XY$ .

Més generalment, direm que una superfície reglada és *cilíndrica* si totes les generatrius són paral·leles a una direcció fixa. Deixem com exercici provar

*una superfície reglada és cilíndrica si, i només si,  $\mathbf{w} \wedge \mathbf{w}' = 0$ .*

Direm que una superfície reglada és *no-cilíndrica* si  $\mathbf{w}(u) \wedge \mathbf{w}'(u) \neq 0$  per a tot  $u$ . Observem que això significa negar la condició de cilíndrica *en tots els punts*, per la qual cosa la propietat no-cilíndrica no és excloent amb la propietat cilíndrica: hi ha superfícies reglades que no són cilíndriques ni tampoc no-cilíndriques com, per exemple, la superfície  $\varphi(u, v) = v(u^2, 1, 0)$ , per a la qual  $\mathbf{w} \wedge \mathbf{w}' = (0, 0, 2u)$ .

**4.2.4 Exemples.** (1) Les quàdriques reglades són exemples de superfícies reglades. Així, el paraboloide hiperbòlic, l'hiperboloide de revolució o el con són superfícies reglades no-cilíndriques.

(2) L'*helicoid* recte és la superfície reglada generada per una recta ortogonal a l'eix  $OZ$  que es recolza en una hèlice:

$$\varphi(u, v) = (a \cos u, a \sin u, bu) + v(\cos u, \sin u, 0).$$

És una superfície reglada no-cilíndrica.

**4.2.5 Proposició.** *Sigui  $\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{w}(u)$  una superfície reglada no-cilíndrica amb  $|\mathbf{w}(u)| = 1$ . Aleshores, existeix una corba  $\beta(u)$  sobre la superfície tal que*

$$(1) \quad \langle \beta'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle = 0, \text{ per a tot } u \in I.$$

$$(2) \quad \beta(u) \text{ no depèn de la directriu } \alpha(u) \text{ escollida.}$$

A més,  $\beta(u)$  està definida per

$$\beta(u) = \alpha(u) - \frac{\langle \alpha'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle}{\langle \mathbf{w}'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle} \mathbf{w}(u).$$

**Demostració.** (1) Si considerem una corba  $\beta(u) = \alpha(u) + v(u)\mathbf{w}(u)$  i imposen la condició enunciada en aquest punt, trobem

$$\langle \beta'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle = \langle \alpha'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle + v(u)\langle \mathbf{w}'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle = 0 \implies v(u) = -\frac{\langle \alpha'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle}{\langle \mathbf{w}'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle}.$$



(2) Suposem que utilitzem una altra directriu  $\bar{\alpha}(u)$  per parametritzar la superfície reglada i sigui  $\bar{\beta}(u)$  la corba corresponent del punt (1). Tindrem

$$\alpha(u) + v\mathbf{w}(u) = \bar{\alpha}(u) + \bar{v}\mathbf{w}(u),$$

per la qual cosa resulta

$$\begin{aligned} \beta(u) - \bar{\beta}(u) &= \alpha(u) - \bar{\alpha}(u) + \frac{\langle \bar{\alpha}'(u) - \alpha'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle}{\langle \mathbf{w}'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle} \mathbf{w}(u) \\ &= \alpha(u) - \bar{\alpha}(u) + \frac{\langle (\bar{v} - v)\mathbf{w}'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle}{\langle \mathbf{w}'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle} \mathbf{w}(u) \\ &= (\bar{v} - v)\mathbf{w}(u) - (\bar{v} - v)\mathbf{w}(u) = 0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

A la corba  $\beta(u)$  caracteritzada en la proposició anterior l'anomenarem la *línia d'estricció* de la superfície reglada; als seus punts els anomenarem els *punts centrals* de la superfície. Observem que cada recta generatriu de la superfície reglada té un únic punt central.

En les condicions de la proposició, es té

$$\left. \begin{aligned} \langle \mathbf{w}', \mathbf{w} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{w}', \beta' \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \beta'(u) \wedge \mathbf{w}(u) = \lambda(u)\mathbf{w}'(u),$$

amb

$$\lambda(u) = \frac{\langle \beta'(u) \wedge \mathbf{w}(u), \mathbf{w}'(u) \rangle}{|\mathbf{w}'(u)|^2}$$

Direm que  $\lambda(u)$  és el *paràmetre de distribució* de la superfície reglada  $\varphi$ .

**4.2.6 Lema.** Si, en les hipòtesis anteriors, reparametritzem la superfície de manera que la directriu sigui la línia d'estricció, es té

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \lambda \mathbf{w}' + v \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w},$$

i, per tant,

$$N = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + v^2}} \frac{\mathbf{w}'}{|\mathbf{w}'|} + \frac{v}{\sqrt{\lambda^2 + v^2}} \frac{\mathbf{w}' \wedge \mathbf{w}}{|\mathbf{w}'|}. \quad \blacksquare$$

D'aquest lema se segueixen immediatament les propietats següents:

**4.2.7 Proposició.**  *sigui  $\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{w}(u)$  una superfície reglada no-cilíndrica, amb línia d'estricció  $\alpha(u)$ ,  $|\mathbf{w}| = 1$ , i paràmetre de distribució  $\lambda(u)$ . Aleshores,*

- (1) *Els punts singulars de la superfície són els punts de la línia d'estricció tals que  $\lambda(u) = 0$ .*

(2) La curvatura de Gauss de la superfície en els punts regulars és

$$K = -\frac{\lambda(u)}{(\lambda(u)^2 + v^2)^2} \leq 0.$$

(3) La curvatura de Gauss  $K$  s'anul·la al llarg de les rectes generatrius amb punt central singular.

(4) En els punts regulars de la línia d'estricció, la curvatura  $K$  atansa el valor màxim al llarg de la recta generatriu corresponent i tendeix a zero quan ens desplacem al llarg de la generatriu ( $u = \text{cnt}, v \rightarrow \infty$ ). ■

Podem enunciar les conclusions anteriors en termes del vector normal a la superfície  $S$ :

**4.2.8 Corol·lari.** En les condicions de la proposició anterior, se satisfà:

- (1) El vector normal a  $S$  en els punts regulars de la línia d'estricció és el vector  $\pm \mathbf{w}'/|\mathbf{w}'|$ .
- (2) Si  $\lambda(u_0) = 0$ , el vector normal al llarg de la generatriu  $u = u_0$  és constant, és igual a  $\pm(\mathbf{w}' \wedge \mathbf{w})/|\mathbf{w}' \wedge \mathbf{w}|$ .
- (3) Al llarg de les generatrius amb  $\lambda(u) \neq 0$ , es té

$$\lim_{v \rightarrow \pm\infty} N(u, v) = \pm \frac{\mathbf{w}' \wedge \mathbf{w}}{|\mathbf{w}' \wedge \mathbf{w}|}. \quad \blacksquare$$

Veiem també que si  $\theta(u, v)$  denota l'angle entre els vectors  $N_0(u) = \mathbf{w}'(u)$  i  $N(u, v)$ , aleshores

$$\text{tg } \theta = \frac{v}{\lambda(u)},$$

resultat degut a Chasles:

**4.2.9 Teorema de Chasles.** La tangent de l'angle orientat format pel pla tangent en un punt  $p$  d'una generatriu d'una superfície reglada (amb  $K \neq 0$ ) i el pla central, és proporcional a la distància del punt  $p$  al punt central de la generatriu.

### Superfícies desenvolupables

D'entre les superfícies reglades, les anomenades superfícies desenvolupables mereixen un estudi particular.

**4.2.10 Definició.** Una superfície reglada  $\varphi = \alpha + v\mathbf{w}$  es diu que és *desenvolupable* si la recta normal és constant al llarg de les generatrius.

**4.2.11 Proposició.** Una superfície reglada és *desenvolupable* si, i només si,  $\det(\alpha', \mathbf{w}, \mathbf{w}') = 0$ .

*Demostració.* Comencem observant que el determinant  $\det(\alpha', \mathbf{w}, \mathbf{w}')$  no depèn de la directriu  $\alpha$  escollida ni de l'expressió del vector  $\mathbf{w}$ . En particular, podem suposar que  $|\mathbf{w}| = 1$  i, en el cas de les superfícies no-cilíndriques, que  $\alpha$  és la línia d'estricció.

Fixem un punt  $u_0 \in I$  i distingim dos casos, segons que  $\mathbf{w}'(u_0)$  s'anul·li o no:

- Si  $\mathbf{w}'(u_0) = 0$ , aleshores el determinant  $\det(\alpha', \mathbf{w}, \mathbf{w}')$  s'anul·la en  $u_0$ . D'altra banda, el vector normal  $\varphi_u \wedge \varphi_v = \alpha' \wedge \mathbf{w}$  no depèn de  $v$  al llarg de la generatriu  $u = u_0$ , és a dir, és constant al llarg de la generatriu  $u_0$ . Així, es compleixen les dues condicions simultàniament.
- Si  $\mathbf{w}'(u_0) \neq 0$ , existirà un entorn de  $u_0 \in I$  on  $\mathbf{w}' \neq 0$ , per tant podem suposar que  $\varphi$  és no-cilíndrica. Però aleshores  $\det(\alpha', \mathbf{w}, \mathbf{w}') = \lambda(u)$  és el paràmetre de distribució, i podem aplicar el lema 4.2.6 per deduir el resultat ■

**4.2.12 Exemples.** (1) Les superfícies cilíndriques són desenvolupables.

(2) Direm que una superfície reglada és *cònica* si totes les seves generatrius passen per un punt. Les superfícies còniques són desenvolupables.

(3) *Superfícies tangencials:* sigui  $\alpha$  una corba regular. La superfície de les rectes tangents

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\alpha'(u)$$

s'anomena la *superfície tangencial* de  $\alpha$ . Aquestes superfícies són desenvolupables.

De fet, els exemples anteriors exhaureixen (gairebé) totes les superfícies desenvolupables en el sentit que precisem en el resultat següent:

**4.2.13 Proposició.** Sigui  $\varphi$  una superfície reglada no-cilíndrica amb línia d'estricció la corba regular  $\alpha$ . Aleshores,  $\varphi$  és una superfície desenvolupable si, i només si,  $\varphi$  és la superfície tangencial de  $\alpha$ .

*Demostració.* Suposem que  $\varphi$  és desenvolupable,  $\lambda = 0$ . Normalitzant  $\mathbf{w}$ , podem suposar que  $\varphi = \alpha + v\mathbf{w}$  amb  $|\mathbf{w}| = 1$ . Per la definició del paràmetre de distribució,  $\alpha' \wedge \mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} = 0$ , i aleshores  $\mathbf{w}$  és paral·lel a  $\alpha'$ , per la qual cosa  $\varphi$  és la superfície tangencial de  $\alpha$ . ■

**4.2.14 Justificació del nom de les superfícies desenvolupables.** El terme *desenvolupable* fa referència a que la superfície es pot desenvolupar sobre un pla, és a dir, que és localment isomètrica a un pla, (observem que, efectivament, aquesta afirmació és compatible amb el teorema egregi de Gauss ja que la curvatura d'una superfície desenvolupable és zero). Analitzarem aquest resultat més detalladament al capítol 7, quan estudiem les superfícies regulars de curvatura constant.

### 4.3 Superfícies minimals

**4.3.1 Definició.** Sigui  $S$  una superfície regular de  $\mathbb{R}^3$ . Direm que  $S$  és una *superfície minimal* si  $H = 0$ .

**4.3.2 Exemples.** Els exemples clàssics de superfícies minimals són els següents:

(1) Un pla és una superfície minimal.

(2) L'helicoid

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v),$$

és una superfície minimal.

(3) La catenoide és una superfície de revolució minimal, com hem vist a 4.1.9.

Per interpretar geomètricament la condició de minimalitat analitzem la variació de l'àrea d'una regió compacta de  $S$  per una deformació ortogonal: considerem una parametrització regular  $\varphi : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  i  $D \subset U$  un domini tal que  $\overline{D} \subset U$  és compacte. Donada una funció contínua, i diferenciable a l'interior,  $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , definim la *variació normal de  $\varphi(\overline{D})$  determinada per  $h$*  com l'aplicació  $\overline{\varphi} : \overline{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida per

$$\overline{\varphi}(u, v, t) = \varphi(u, v) + th(u, v)N(u, v).$$

D'aquesta manera, per a cada valor del paràmetre  $t$  s'obtenen superfícies parametritzades

$$\varphi^t : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

**4.3.3 Proposició.** Per a  $\varepsilon$  suficientment petit,  $\varphi^t$  defineix una parametrització regular, d'àrea

$$A(t) = \int_{\overline{D}} \sqrt{1 - 4hH + \overline{R}} \sqrt{EF - F^2} \, dudv,$$

on  $\overline{R} = R/(EG - F^2)$  i  $R$  és tal que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R}{t} = 0$ .

*Demostració.* Calculant l'element d'àrea de  $\varphi^t$  trobem

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge)t + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 2tH) + R, \end{aligned}$$

d'on se segueix la proposició. ■

Derivant  $A(t)$  en el zero trobem

$$A'(0) = - \int_{\overline{D}} 2hH \sqrt{EG - F^2} \, dudv,$$

d'on es dedueix la interpretació de la minimalitat següent:

**4.3.4 Proposició.**  $\varphi$  és minimal si, i només si,  $A'(0) = 0$  per a tota funció  $h(t)$  i tota regió  $D$  amb  $\overline{D} \subset U$  compacte.

**4.3.5 Corol·lari.** Si la parametrització  $\varphi$  minimitza la variació normal de l'àrea, aleshores  $\varphi$  és minimal. ■

Sembla natural demanar-se si, recíprocament, les superfícies minimals minimitzen l'àrea. Per exemple, i per precisar una mica més aquesta qüestió, donada una corba tancada simple de l'espai  $C$  i una superfície minimal  $S$  que la té per frontera, minimitza  $S$  l'àrea entre les superfícies que tenen frontera  $C$ ? No sempre és així; el lector interessat pot consultar el capítol 7 del llibre de Oprea [O] i les referències que allà es mencionen.

**4.3.6 Exemple.** *Superfícies minimals de revolució.* Hem vist als exemples 4.3.2 que un pla o una catenoide són superfícies minimals. De fet, aquests dos exemples cobreixen totes les superfícies minimals de revolució, en el sentit que es té

*Tota superfície minimal de revolució (i connexa) és part d'un pla o d'una catenoide.*

En efecte, si la corba que genera la superfície de revolució és una recta ortogonal a l'eix de gir, aleshores la superfície és part d'un pla. En cas contrari, podem suposar que la corba admet una parametrització en la forma  $\alpha(s) = (r(s), s)$ . De les fórmules obtingudes a 4.1.6 se segueix que perquè la superfície sigui minimal s'haurà de satisfer

$$\begin{aligned} H = 0 &\implies k_{\text{meridians}} = -k_{\text{paralels}} \\ &\implies \frac{r''}{(1 + (r')^2)^{3/2}} = \frac{1}{r(1 + (r')^2)^{1/2}} \implies rr'' - (r')^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Com hem exclòs el pla, existeix un  $v_0$  amb  $r'(v_0) \neq 0$ , valor que es matindrà  $\neq 0$  en un entorn de  $v_0$ . En aquest entorn, l'equació anterior és equivalent a l'obtinguda multiplicant ambdós costats per  $2r'(v)$ ,

$$\frac{2rr''}{1+(r')^2} = \frac{2r'}{r}.$$

Integrant en ambdós costats d'aquesta igualtat resulta

$$\ln(1+(r')^2) = \ln(r^2) + c \implies 1+(r')^2 = k^2 r^2 \implies \frac{r'}{\sqrt{k^2 r^2 - 1}} = 1,$$

i integrant aquesta darrera equació trobem, finalment,

$$r = \frac{1}{k} \cosh(ku + c),$$

és a dir, la corba  $\alpha$  és una catenària i, consegüentment, la superfície és part d'una catenoide.

**4.3.7 Exemple.** *Superfícies minimals reglades.* Considerem ara les superfícies minimals reglades. El pla i l'helicoide són exemples coneguts, i de fet es té el resultat següent, conegut com a *Teorema de Catalan*:

*Tota superfície minimal reglada (i connexa) és part d'un pla o d'un helicoide.*

Comencem la prova observant que podem parametritzar la superfície en la forma  $\varphi = \alpha + v\mathbf{w}$  amb

$$|\alpha'(u)| = 1, \quad |\mathbf{w}(u)| = 1, \quad \langle \alpha'(u), \mathbf{w}(u) \rangle = 0.$$

Només la darrera igualtat necessita justificació: si  $\beta + v\mathbf{w}$  és una parametrització de la superfície reglada, busquem una corba  $\alpha(u) = \beta(u) + v(u)\mathbf{w}(u)$  que satisfaci  $\langle \alpha', \mathbf{w} \rangle = 0$ . Imposant aquesta condició trobem que  $\langle \beta', \mathbf{w} \rangle + v' = 0$ , i integrant aquesta darrera equació veiem que, efectivament, podem determinar una corba  $\alpha$  com la demanada.

Si calculem ara la primera i la segona formes fonamentals, trobem

$$E = 1 + v\langle \alpha', \mathbf{w}' \rangle + v^2\langle \mathbf{w}', \mathbf{w}' \rangle, \quad F = 0, \quad G = 1, \\ e = \frac{\langle \alpha'', \alpha' \wedge \mathbf{w} \rangle + v\langle \alpha'', \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w} \rangle + v\langle \mathbf{w}'', \alpha' \wedge \mathbf{w} \rangle + v^2\langle \mathbf{w}'', \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w} \rangle}{\sqrt{E}}, \quad f = ?, \quad g = 0,$$

i, per tant la condició de minimalitat  $H = e/2E = 0$  es converteix en l'equació

$$\langle \alpha'', \alpha' \wedge \mathbf{w} \rangle + v\langle \alpha'', \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w} \rangle + v\langle \mathbf{w}'', \alpha' \wedge \mathbf{w} \rangle + v^2\langle \mathbf{w}'', \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w} \rangle = 0.$$

Com l'expressió de l'esquerra de l'equació és un polinomi en  $v$ , la seva anul·lació equival a l'anul·lació dels seus coeficients, així, aquesta equació és equivalent a les equacions

$$\begin{aligned}\langle \alpha'', \alpha' \wedge \mathbf{w} \rangle &= 0, \\ \langle \alpha'', \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}'', \alpha' \wedge \mathbf{w} \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{w}'', \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w} \rangle &= 0,\end{aligned}$$

Denotem per  $\Pi(-, -)$  el pla generat per dos vectors. De la primera equació deduïm que  $\alpha'' \in \Pi(\alpha', \mathbf{w})$  i, per les condicions d'ortogonalitat imposades, que  $\alpha'' \parallel \mathbf{w}$ . Més encara, com ambdós vectors són unitaris, de la definició de curvatura de  $\alpha$  se segueix que  $\alpha'' = \pm \kappa \mathbf{w}$ ; en particular, veiem que  $\langle \alpha'', \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w} \rangle = 0$ .

Així, la segona igualtat es redueix a  $\langle \mathbf{w}'', \alpha' \wedge \mathbf{w} \rangle = 0$ , el què combinat amb la tercera igualtat ens permet concloure que

$$\mathbf{w}'' \in \Pi(\alpha', \mathbf{w}) \cap \Pi(\mathbf{w}', \mathbf{w}).$$

Distingim ara dues possibilitats segons que els plans  $\Pi(\alpha', \mathbf{w})$ ,  $\Pi(\mathbf{w}', \mathbf{w})$  coincideixin o es tallin al llarg de la recta generada per  $\mathbf{w}''$ .

Suposem que  $\Pi(\alpha', \mathbf{w}) = \Pi(\mathbf{w}', \mathbf{w})$ . Aleshores  $\mathbf{w}''$  no és paral·lel a  $\mathbf{w}$  en un punt i, per tant, tampoc en un entorn d'aquest punt. De les condicions d'ortogonalitat imposades, se segueix que  $\alpha' = a\mathbf{w}'$ , però aleshores

$$N = \frac{(1 \pm av)(\alpha' \wedge \mathbf{w})}{|1 \pm av||\alpha' \wedge \mathbf{w}|} = \pm \alpha' \wedge \mathbf{w},$$

ja que  $|\alpha' \wedge \mathbf{w}| = 1$ . Si derivem respecte de  $u$ , trobem

$$N_u = \alpha'' \wedge \mathbf{w} + \alpha' \wedge \mathbf{w}' = \kappa \mathbf{w} \wedge \mathbf{w} + a\mathbf{w}' \wedge \mathbf{w}' = 0,$$

ja que  $\alpha'' = \pm \kappa \mathbf{w}$  i  $\alpha' = a\mathbf{w}'$ . És a dir, el vector normal  $N$  és constant, i  $S$  és part d'un pla.

Suposem ara que  $\langle \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}'' \rangle = \Pi(\alpha', \mathbf{w}) \cap \Pi(\mathbf{w}', \mathbf{w})$ , amb la qual cosa  $\mathbf{w}'' \parallel \mathbf{w}$ . En aquest cas, anem a comprovar que la curvatura i la torsió de  $\alpha$  són constants i, en conseqüència, que  $\alpha$  és una hèlice circular. Derivant respecte del paràmetre  $u$  la igualtat  $\kappa = \kappa \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \langle \alpha'', \mathbf{w} \rangle = -\langle \alpha', \mathbf{w}' \rangle$  obtenim

$$(\kappa)' = -\langle \alpha'', \mathbf{w}' \rangle - \langle \alpha', \mathbf{w}'' \rangle = 0.$$

ja que  $\alpha''$ ,  $\mathbf{w}''$  són paral·lels a  $\mathbf{w}$  i  $\alpha'$  és ortogonal a  $\mathbf{w}$ . És a dir, la curvatura de  $\alpha$  és constant. Un raonament anàleg, que deixem com exercici, permet provar que la torsió també és constant.

En definitiva, llevat d'un moviment positiu, podem parametritzar  $\alpha$  en la forma  $\alpha(u) = (a \cos u, a \sin u, bu)$  amb  $a^2 + b^2 = 1$ . Com  $\mathbf{w}$  és unitari i paral·lel a  $\alpha''$ ,  $\mathbf{w}(u) = (\cos u, \sin u, 0)$ , amb la qual cosa

$$\varphi(u, v) = (a \cos u, a \sin u, bu) + v(\cos u, \sin u, 0) = ((a + v) \cos u, (a + v) \sin u, bu),$$

que és la parametrització d'un helicoides recte.

**4.3.8 Observació.** És interessant observar que l'helicoides i la catenoides són superfícies localment isomètriques.

Durant molts anys, fins a les primeries del segle XIX, el pla, l'helicoides i la catenoides van ser les úniques superfícies minimals conegudes, cosa que no resulta sorprenent a la vista de les caracteritzacions dels exemples anteriors. La primera superfície minimal diferent d'aquestes va ser introduïda Scherk el 1835. Assenyalarem que per a l'estudi de les superfícies minimals són de gran utilitat les funcions complexes a partir de les representacions de Weierstrass-Enneper, vegeu [O].



# Geodèsiques

En aquest capítol estudiarem les geodèsiques d'una superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  i analitzarem les seves propietats fonamentals. Aquestes corbes són, en un sentit que anirem precisant al llarg del capítol, l'equivalent del què representen les rectes al pla. Ara bé, les rectes del pla gaudeixen de diverses propietats que les caracteritzen que, en canvi, no són equivalents per a les geodèsiques. El quadre següent resumeix les propietats a les quals ens referim i dóna la referència corresponent per a les geodèsiques.

	<i>recta</i>	<i>geodèsica</i>
<b>PR1</b>	acceleració zero	definició 5.2.1
<b>PR2</b>	$\kappa = 0$	$\kappa_g = 0$ : proposició 5.2.3
<b>PR3</b>	corba de mínima distància entre dos punts	propietat local: teorema 5.3.14
<b>PR4</b>	dos punts determinen una única recta	existència: teorema 5.4.2

Començarem definint les geodèsiques com corbes d'acceleració tangencial zero, per a la qual cosa introduïrem la derivada covariant d'un camp vectorial.

## 5.1 Derivada covariant i transport paral·lel

En tota aquesta secció  $S \subset \mathbb{R}^3$  serà una superfície regular orientada per un camp normal  $N$ . Recordem que localment tota superfície és orientable i que, per tant, les nocions que introduïrem s'apliquen a tota superfície parametritzada.

Volem definir l'acceleració tangencial d'una trajectòria de  $S$ . Més generalment, derivarem un camp vectorial al llarg de la trajectòria. Sigui  $\alpha : I \rightarrow S$  una corba diferenciable.

**5.1.1 Definició.** Un *camp vectorial (tangent) sobre  $\alpha$*  és una aplicació diferenciable  $w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $w(t) \in T_{\alpha(t)}S$ .

Un *camp vectorial (tangent)* de  $S$  és una aplicació diferenciable  $w : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $w(p) \in T_p S$ .

Observem que un camp vectorial  $w(p)$  sobre  $S$  defineix un camp vectorial sobre tota corba  $\alpha$  de  $S$ ,  $w(t) = w(\alpha(t))$ .

Per exemple, el camp vectorial constant  $w = (0, 0, 1)$  defineix un camp vectorial sobre el paral·lel  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$  de l'esfera unitat, ja que aquest vector és tangent a l'esfera en tots els punts de la corba. Aquest camp constant, però, no defineix un camp sobre tota l'esfera.

**5.1.2 Definició.** Es defineix la *derivada covariant del camp vectorial  $w$  al llarg de  $\alpha$*  com el component tangencial de  $w'(t)$ , és a dir,

$$\frac{Dw(t)}{dt} := \frac{dw(t)}{dt} - \left\langle \frac{dw(t)}{dt}, N \right\rangle N.$$

**5.1.3 Exemples.** (1) Si  $S$  és el pla  $\mathbb{R}^2$ , la derivada covariant d'un camp vectorial  $w(t)$  al llarg d'una corba  $\alpha(t)$  no és altra cosa que el camp  $w'(t)$ .

(2) Sigui  $S$  l'esfera unitat de  $\mathbb{R}^3$  orientada pel normal exterior. Parametritzem  $S$  amb coordenades esfèriques

$$\varphi(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v),$$

i sigui  $w = \varphi_v$  el camp vectorial tangent als meridians, (corbes coordenades  $u = \text{const}$ ),

$$w = \varphi_v = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v).$$

Si considerem l'equador  $v = 0$ , és a dir, la corba  $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, 0)$ , aleshores,  $w(s) = (0, 0, 1)$ . Aquest camp vectorial és constant i, per tant, la derivada covariant al llarg de l'equador és:

$$\frac{dw(t)}{dt} = 0 \implies \frac{Dw(t)}{dt} = 0.$$

Sigui ara  $\beta$  el paral·lel corresponent a  $v = \pi/4$ , trobem:

$$\begin{aligned} \beta(t) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) &\implies w(t) = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &\implies \frac{Dw(t)}{dt} = \frac{dw(t)}{dt} - \langle w'(t), N \rangle N \\ &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, 0 \right). \end{aligned}$$

Finalment, sigui  $\gamma(v) = (0, \cos v, \sin v)$  el meridià corresponent a  $u = \pi/2$ , aleshores  $w(v) = (0, -\sin v, \cos v)$  i, per tant,

$$\begin{aligned} \frac{Dw(v)}{dv} &= w'(v) - \langle w'(v), N \rangle N \\ &= (0, -\cos v, -\sin v) - \langle (0, -\cos v, -\sin v), (0, 0 \cos v, \sin v) \rangle (0, 0 \cos v, \sin v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

No hi ha res especial en el meridià  $u = \pi/2$ ; de fet, la derivada covariant d'aquest camp vectorial al llarg de qualsevol meridià és zero, com es comprova fàcilment.

**5.1.4** El càlcul de la derivada covariant en un punt  $t = 0$  parteix del càlcul de  $w'(0)$ , que es realitza a  $\mathbb{R}^3$ : en efecte, per la definició de derivada

$$w'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{w(t) - w(0)}{t},$$

i la diferència  $w(t) - w(0)$  es calcula a l'espai i no a la superfície, ja que els vectors  $w(0)$  i  $w(t)$  pertanyen a plans tangents diferents i, per tant, aquesta diferència no defineix, en general, una direcció tangent a  $S$ . Pensant en els vectors tangents com a vectors de la varietat afí tangent (és a dir, situant-los en el punt de tangència de la superfície), la definició de derivada covariant en un punt  $t = 0$  s'ajusta al següent esquema:

- Traslladem paral·lelament els vectors  $w(t)$  fins al punt  $p = \alpha(0)$ . Aquests vectors traslladats no seran necessàriament tangents a la superfície.
- Centrats tots els vectors en el punt  $p$ , calculem (a  $\mathbb{R}^3$ )

$$w'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{w(t) - w(0)}{t}.$$

- Projectem ortogonalment aquest vector sobre el pla tangent  $T_p S$ .

Obervem que en el segon pas hem utilitzat un canvi de referència (de l'origen de la referència, per ser més precisos) de l'espai afí  $\mathbb{R}^3$ , que intepretem com un trasllat paral·lel del vector  $w(t_0)$  centrat al punt  $\alpha(t_0)$  fins el vector  $w(t_0)$  centrat ara en el punt  $p$ , cosa que podem realitzar amb un camp vectorial: el camp constant definit per  $\bar{w}(t) = w(t_0)$  al llarg de la corba  $\alpha$ . Essent un camp constant, la seva derivada és zero,  $\bar{w}'(t) = 0$ . La noció corresponents per a una superfície és la següent:

**5.1.5 Definició.** Direm que  $w(t)$  és un *camp paral·lel al llarg de  $\alpha$*  si

$$\frac{Dw(t)}{dt} = 0.$$

Així, els components d'un camp  $w(t)$  paral·lel al llarg de  $\alpha$  satisfan el sistema d'equacions diferencials ordinàries

$$w'(t) - \langle w'(t), N(t) \rangle N(t) = 0.$$

**5.1.6 Exemples.** Si reprenem els exemples anteriors, trobem:

- (1) Els camps paral·lels al llarg d'una corba del pla són els camps constants.
- (2) El camp de vectors tangents als meridians d'una esfera és paral·lel al llarg de l'equador o dels meridians (casos  $\alpha, \gamma$ ), però no ho és al llarg d'un paral·lel que no sigui l'equador (cas  $\beta$ ).

**5.1.7 Proposició.** *Sigui  $p \in S$  un punt de  $S$ ,  $w_0 \in T_p S$  un vector tangent a  $S$  en  $p$  i  $\alpha : I \rightarrow S$  una corba regular amb  $\alpha(0) = p$ . Aleshores, existeix un únic camp vectorial  $w(t)$ ,  $t \in I$ , que és paral·lel al llarg de  $\alpha$  i que satisfà la condició inicial  $w(0) = w_0$ .*

*Demostració.* Volem trobar un camp vectorial  $w(t)$  tangent a  $S$  i que sigui paral·lel al llarg de  $\alpha$ . Observem que si apliquem el teorema d'existència i unicitat de les equacions diferencials ordinàries a l'equació anterior obtindrem un camp vectorial  $w(t)$  a  $\mathbb{R}^3$  que no sabem si, per a tot  $t$ , es mantindrà tangent a la superfície. Per tal d'aconseguir aquesta tangència, variem les equacions imposant que  $w(t)$  sigui un camp tangent, és a dir, tal que  $\langle w(t), N(t) \rangle = 0$ : es té

$$\begin{aligned} \frac{Dw(t)}{dt} &= w'(t) - \langle w'(t), N(t) \rangle N(t) \\ &= w'(t) - ((\langle w(t), N(t) \rangle)' - \langle w(t), N'(t) \rangle) N(t) \\ &= w'(t) + \langle w(t), N'(t) \rangle N(t) - (\langle w(t), N(t) \rangle)' N(t), \end{aligned}$$

així, si imposem que  $\langle w(t), N(t) \rangle = 0$ , el camp  $w(t)$  serà paral·lel si, i només si,

$$w'(t) + \langle w(t), N'(t) \rangle N(t) = 0. \quad (\dagger)$$

Ara sí, apliquem el teorema d'existència i unicitat de les *edos* lineals a aquesta darrera equació per a obtenir una única solució tal que  $w(0) = w_0$ . Per comprovar que el camp resultant és tangent a  $S$  basta veure que  $\langle w(t), N(t) \rangle$  és constant, ja que aquesta funció val zero per  $t = 0$ , i això se segueix de

$$\begin{aligned} (\langle w(t), N(t) \rangle)' &= \langle w'(t), N(t) \rangle + \langle w(t), N'(t) \rangle \\ &= -\langle \langle w(t), N'(t) \rangle N(t), N(t) \rangle + \langle w(t), N'(t) \rangle \quad \text{per ser solució de } (\dagger) \\ &= -\langle w(t), N'(t) \rangle + \langle w(t), N'(t) \rangle = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**5.1.8 Definició.** Sigui  $\alpha : I \rightarrow S$  una corba regular,  $p = \alpha(0)$ ,  $q = \alpha(1)$ . Es defineix el *transport paral·lel de  $p$  a  $q$  al llarg de  $\alpha$*  com l'aplicació

$$\tau_\alpha : T_p S \rightarrow T_q S$$

que a tot vector tangent  $w_0 \in T_p S$  associa el vector  $w(1) \in T_q S$ , essent  $w(t)$  l'únic camp paral·lel al llarg de  $\alpha$  amb condició inicial  $w(0) = w_0$ .

Atès que el sistema d'edos que defineix els camps paral·lels és lineal, aquesta aplicació  $\tau_\alpha$  és una aplicació lineal.

**5.1.9 Proposició.** Si  $w, \bar{w}$  són dos camps paral·lels al llarg d'una corba  $\alpha$ , aleshores el producte escalar  $\langle w(t), \bar{w}(t) \rangle$  és constant.

*Demostració.* En efecte, es té

$$\frac{d}{dt} \langle w(t), \bar{w}(t) \rangle = \langle w'(t), \bar{w}(t) \rangle + \langle w(t), \bar{w}'(t) \rangle = \left\langle \frac{D}{dt} w(t), \bar{w}(t) \right\rangle + \left\langle w(t), \frac{D}{dt} \bar{w}(t) \right\rangle = 0,$$

on en la darrera igualtat hem utilitzat la hipòtesis de que els camps són paral·lels. ■

**5.1.10 Corol·lari.** (1) El mòdul d'un camp paral·lel al llarg d'una corba  $\alpha$  es manté constant.

(2) L'angle entre dos camps paral·lels al llarg d'una corba  $\alpha$  es manté constant. ■

I, en particular,

**5.1.11 Corol·lari.** El transport paral·lel al llarg de  $\alpha$ ,  $\tau_\alpha : T_p S \rightarrow T_q S$ , és una isometria d'espais euclidians. ■

Veiem doncs que la derivada covariant dóna lloc al transport paral·lel. Recíprocament, si es coneix el transport paral·lel es pot recuperar la derivada covariant seguint l'esquema de 5.1.4 però ara mantenint-nos en el pla tangent:

**5.1.12 Proposició.** Sigui  $w(t)$  un camp vectorial sobre una corba  $\alpha$  de  $S$  i  $p = \alpha(0)$ . Denotem per  $\tau_t : T_{\alpha(t)} S \rightarrow T_p S$ , el transport paral·lel al llarg de  $\alpha$ ; aleshores

$$\left. \frac{Dw(t)}{dt} \right|_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t(w(t)) - w(0)}{t}.$$

*Demostració.* Siguin  $e_1, e_2$  vectors de  $T_p S$  que formen una base ortonormal i denotem per  $e_1(t), e_2(t)$  els camps paral·lels al llarg de  $\alpha$  que generen. El camp vectorial  $w(t)$  s'expressarà en la forma

$$w(t) = a(t)e_1(t) + b(t)e_2(t),$$

on les funcions  $a(t), b(t)$  són diferenciables, ja que  $a(t) = \langle w(t), e_1(t) \rangle, b(t) = \langle w(t), e_2(t) \rangle$ . Com que el transport paral·lel és lineal i els camps  $e_1(t), e_2(t)$  són paral·lels, es té

$$\tau_t(w(t)) = a(t)\tau_t(e_1(t)) + b(t)\tau_t(e_2(t)) = a(t)e_1 + b(t)e_2,$$

i, per tant,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t(w(t)) - w(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a(t)e_1 + b(t)e_2 - a(0)e_1 - b(0)e_2}{t} = a'(0)e_1 + b'(0)e_2.$$

Calculem ara la derivada covariant de  $w(t)$  al llarg de  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{Dw(t)}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{D(a(t)e_1(t) + b(t)e_2(t))}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= a'(0)e_1 + a(0) \frac{De_1(t)}{dt} \Big|_{t=0} + b'(0)e_2 + b(0) \frac{De_2(t)}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= a'(0)e_1 + b'(0)e_2, \end{aligned}$$

i retrobem el càlcul anterior, el què acaba la prova. ■

### *Derivada covariant i transport paral·lel en coordenades locals*

Per tal de calcular la derivada covariant en coordenades locals, fixem  $\varphi : U \rightarrow S$  una parametrització regular positiva (és a dir, amb  $N = \varphi_u \wedge \varphi_v / |\varphi_u \wedge \varphi_v|$ ), en la qual la corba  $\alpha$  correspon a  $(u(t), v(t))$  i el camp vectorial  $w$  s'escriu  $w = a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v$ .

**5.1.13 Proposició.** *La derivada covariant de  $w$  al llarg de la corba  $\alpha$  ve donada per*

$$\begin{aligned} \frac{Dw(t)}{dt} &= (a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv')\varphi_u \\ &\quad + (b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv')\varphi_v. \end{aligned}$$

*Demostració.* Calculem  $w'(t)$  a partir de l'expressió  $w = a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v$ ,

$$\begin{aligned} w'(t) &= (a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v)' \\ &= a'(t)\varphi_u + a(t)[\varphi_{uu}u' + \varphi_{uv}v'] + b'(t)\varphi_v + b(t)[\varphi_{uv}u' + \varphi_{vv}v'] \\ &= a'(t)\varphi_u + a(t)[(\Gamma_{11}^1 u' + \Gamma_{12}^1 v')\varphi_u + (\Gamma_{11}^2 u' + \Gamma_{12}^2 v')\varphi_v] \\ &\quad + b'(t)\varphi_v + b(t)[(\Gamma_{12}^1 u' + \Gamma_{22}^1 v')\varphi_u + (\Gamma_{12}^2 u' + \Gamma_{22}^2 v')\varphi_v] \\ &\quad + [a(t)(e + f) + b(t)(f + g)]N. \end{aligned}$$

Per la qual cosa, el component tangencial de  $w'(t)$  és el que apareix a l'enunciat de la proposició. ■

D'aquí se segueix que l'equació diferencial dels camps paral·lels ve donada per les equacions que enuniem a continuació.

**5.1.14 Equació dels camps paral·lels.** En una parametrització regular  $\varphi$ , un camp  $w = a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v$  és paral·lel al llarg de la corba  $(u(t), v(t))$  si, i només si, satisfà les equacions diferencials

$$\begin{aligned} a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv' &= 0, \\ b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv' &= 0. \end{aligned}$$

**5.1.15 Observació.** Les fórmules locals que hem trobat demostren que *la derivada covariant i la noció de camp paral·lel al llarg d'una corba mostren són conceptes intrínsecs* ja que estan determinats pels símbols de Christoffel que, com sabem, depenen al seu torn de la primera forma fonamental.

**5.1.16 Exemples.** (1) L'aplicació  $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$  estableix una isometria local entre un obert del pla i el cilindre de radi 1. Coneixem el transport paral·lel al pla i, per l'observació anterior, sabem calcular el transport paral·lel en el cilindre. Anàlogament, es calcula el transport paral·lel sobre un con mitjançant l'isometria local que consisteix en tallar el con al llarg d'una generatriu i desplegar la superfície resultant sobre un pla. Animem al lector a calcular diferents exemples.

(2) Considerem la corba següent de l'esfera: partim del pol nord seguim per un meridià fins a l'equador, seguim per l'equador fins a completar una longitud (angle)  $\theta$  i tornem al pol nord pel meridià d'aquesta longitud. Sigui  $w$  un vector unitari tangent al primer meridià del recorregut en el pol nord. Hem comprovat en exemples anteriors que el camp tangent a un meridià és paral·lel, per la qual cosa el transport paral·lel de  $w$  fins a trobar l'equador és el vector tangent  $(0, 0, 1)$ ; però hem vist també que el camp constant  $(0, 0, 1)$  és paral·lel al llarg de l'equador, per tant només queda transportar aquest vector al llarg del segon meridià. Un cop més, en resulta el camp tangent a aquest meridià i, en definitiva, veiem que el vector  $\tau(w)$  és un vector tangent al pol nord que fa un angle  $\theta$  amb  $w$ .

Observem que en aquest exemple, el transport paral·lel depèn de l'angle  $\theta$  escollit. En general, el transport paral·lel depèn de la corba  $\alpha$ ; no és així al pla, al cilindre o al con. De fet es pot demostrar que si el transport paral·lel sobre una superfície  $S$  és independent del camí utilitzat per realitzar-lo, aleshores  $K \equiv 0$ .

## 5.2 Geodèsiques

En aquesta secció definim la noció de geodèsica, establim un teorema d'existència i donem els primers exemples. Com en la secció anterior, fixem  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superfície orientada i  $\alpha : I \rightarrow S$  una corba regular.

**5.2.1 Definició.** Direm que  $\alpha$  és una *geodèsica* si el camp tangent  $\alpha'(t)$  és un camp paral·lel al llarg de  $\alpha$ . És a dir,

$$\frac{D\alpha'(t)}{dt} = 0.$$

En termes físics, la definició de geodèsica correspon a aquelles corbes que tenen acceleració tangencial nul·la. Així, segons la segona llei de Newton serien les trajectòries de les partícules sobre les quals no actua cap força (tangencial).

**5.2.2 Exemples.** (1) Les geodèsiques del pla són les rectes recorregudes linealment. En efecte, si  $(u(t), v(t))$  és una geodèsica de  $\mathbb{R}^2$ , satisfarà

$$\alpha''(t) = (u''(t), v''(t)) = 0 \implies \alpha(t) = (at + b, ct + d).$$

(2) Atenent a la definició de la derivada covariant per a  $\alpha'(t)$ ,  $\frac{D\alpha'(t)}{dt} = \alpha''(t) - \langle \alpha''(t), N \rangle N$ , veiem que

$$\alpha''(t) = 0 \implies \alpha \text{ geodèsica},$$

i, per tant, tota recta, recorreguda linealment, continguda en una superfície  $S$  és una geodèsica de  $S$ .

(3) Per a una corba parametritzada per l'arc,  $\alpha''(s) = \kappa n$  i, per tant, si  $\kappa \neq 0$ ,

$$\alpha \text{ geodèsica} \iff n = \pm N.$$

Això ens permet estudiar algunes geodèsiques de les superfícies de revolució: donada una corba regular  $(r(v), 0, z(v))$  amb  $r(v) > 0$ , considerem la superfície de revolució

$$\varphi(u, v) = (r(v) \cos u, r(v) \sin u, z(v)).$$

És immediat comprovar que els meridians  $u = u_0$  (parametritzats per l'arc) són geodèsiques, ja que per als meridians  $n = \pm N$ . Pel que fa als paral·lels  $v = v_0$ , seran geodèsiques aquells per als quals el vector normal a la superfície coincideix amb la direcció normal a la corba, que no és altra que la del radi de revolució. Per tant, els paral·lels que són geodèsiques són aquells que la tangent a la corba  $\alpha(v)$  en el punt  $v_0$  és paral·lela a l'eix de gir.



En particular, veiem que en un cilindre tots els paral·lels són geodèsiques, mentre que per l'esfera només el paral·lel corresponent a l'equador és una geodèsica o que no hi ha paral·lels geodèsics en un paraboloid de revolució.

Més endavant analitzarem altres geodèsiques de les superfícies de revolució.

**5.2.3 Proposició.**  $\alpha(t)$  és una geodèsica si, i només si,  $t$  és un múltiple del paràmetre arc de  $\alpha$  i  $\kappa_g = 0$ .

*Demostració.* Suposem que  $\alpha$  és una geodèsica. Pel corol·lari 5.1.10, el mòdul de  $\alpha'(t)$  és constant al llarg de  $\alpha$ ,  $|\alpha'(t)| = c$ . Per tant, si  $s$  és el paràmetre arc es té

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^s |\alpha'(t)| dt = c \implies s = ct.$$

Calculem ara la derivada del vector tangent  $\mathbf{t}$  respecte de  $s$ ,

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{d\alpha}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c} \frac{d\alpha}{dt} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Per hipòtesi,  $\alpha$  és una geodèsica, és a dir,  $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$  és ortogonal a  $S$  i, per tant, també ho és  $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ . De la definició de curvatura geodèsica se segueix doncs que  $\kappa_g = 0$ .

El recíproc, que es demostra de forma similar i el deixem com a exercici ■

Si la corba  $\alpha(t)$  no està parametritzada per l'arc i  $c(t) = |\alpha'(t)|$ , és un exercici demostrar que se satisfà

$$\alpha''(t) = c'(t)\mathbf{t} + \kappa_g c^2(t)(N \wedge \mathbf{t}) + \langle \alpha''(t), N \rangle N.$$

(Indicació per la prova: de  $\langle \alpha', \alpha' \rangle = c^2$  se segueix que  $\langle \alpha'', \mathbf{t} \rangle = c'(t)$  i ara basta usar la fórmula de la curvatura d'una corba quan el paràmetre no és l'arc per veure que  $\langle \alpha'' \wedge \mathbf{t}, N \rangle = c^2 \kappa_g$ .)

Aquesta expressió dóna una altra prova de la proposició anterior, ja que perquè el component tangencial de  $\alpha''(t)$  sigui zero s'ha de donar simultàniament que  $c'(t) = 0$  (és a dir,  $t$  és múltiple del paràmetre arc) i  $\kappa_g = 0$ .

**5.2.4 Equacions de les geodèsiques.** En una parametrització regular  $\varphi$ , el camp vectorial  $\alpha'(t)$  té components  $(u', v')$ , així, les equacions diferencials del camp paral·lel  $\alpha'(t)$  s'escriuen

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 &= 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 &= 0, \end{aligned}$$

que és un sistema d'equacions diferencials ordinàries d'ordre dos. Observem que aquest sistema no és lineal.

Del teorema d'existència i unicitat es dedueix:

**5.2.5 Proposició.** *Donat un punt  $p \in S$  i un vector tangent  $w \in T_p S$ , existeix una única geodèsica  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  tal que  $\alpha(0) = p$  i  $\alpha'(0) = w$ .* ■

D'altra banda, les equacions de les geodèsiques depenen tant sols dels símbols de Christoffel, per la qual cosa les geodèsiques són intrínseques, cosa que enunciem en la forma següent.

**5.2.6 Teorema.** *Si  $f : S \rightarrow S'$  una isometria local entre dues superfícies regulars i  $\alpha : I \rightarrow S$  una corba regular. Aleshores,  $\alpha$  és una geodèsica de  $S$  si, i només si,  $f \circ \alpha$  és una geodèsica de  $S'$ .* ■

**5.2.7 Exemples.** (1) Les geodèsiques del pla són les rectes. Considerant la isometria local habitual del pla al cilindre, deduïm del corol·lari anterior que les geodèsiques del cilindre són les imatges de les rectes, que no són altres que les hèlices circulars.

(2) *Geodèsiques de les superfícies de revolució.* Reprenem l'exemple de les superfícies de revolució

$$\varphi(u, v) = (r(v) \cos u, r(v) \sin u, z(v)).$$

Dels càlculs efectuats en el capítol 4, deduïm que les equacions de les geodèsiques són

$$\begin{aligned} u'' + \frac{2rr'}{r^2} u'v' &= 0, \\ v'' - \frac{rr'}{(r')^2 + (z')^2} (u')^2 + \frac{r'r'' + z'z''}{(r')^2 + (z')^2} &= 0. \end{aligned}$$

Ja hem vist que els meridians són geodèsiques. Analitzem-ho ara mitjançant aquestes equacions diferencials: fent  $u = cnt$  les equacions esdevenen

$$\begin{aligned} 0 &= 0, \\ v'' + \frac{r'r'' + z'z''}{(r')^2 + (z')^2} (v')^2 &= 0. \end{aligned}$$

La primera equació se satisfà trivialment, mentre que la segona reflecteix que hem de recórrer la corba amb un paràmetre particular, que sigui múltiple del paràmetre arc. En efecte, si la corba  $u = cnt$  està parametritzada per un múltiple de l'arc, satisfarà

$$((r')^2 + (z')^2)(v')^2 = cnt \implies (v')^2 = \frac{1}{(r')^2 + (z')^2}$$

i, derivant respecte de  $t$ ,

$$2v'v'' = -\frac{2(r'r'' + z'z'')}{((r')^2 + (z')^2)^2}v' = -\frac{2(r'r'' + z'z'')}{(r')^2 + (z')^2}(v')^3 \implies v'' = -\frac{(r'r'' + z'z'')}{(r')^2 + (z')^2},$$

ja que  $v' \neq 0$ . És a dir, satisfà també la segona equació.

Si considerem ara els paral·lels  $v = cnt$ , les equacions diferencials es redueixen a

$$\begin{aligned} u'' &= 0, \\ -\frac{rr'}{(r')^2 + (z')^2}(u')^2 &= 0. \end{aligned}$$

per la qual cosa, seran geodèsiques aquells tals que  $r'(v_0) = 0$ , com es dedueix de la segona equació, ja que  $r(v_0)$  i  $u'$  no s'anul·len. És a dir, aquells paral·lels tals que la tangent a la corba  $(r(v), z(v))$  sigui paral·lela a l'eix de gir, com ja havíem vist anteriorment.

Analitzem ara les geodèsiques en una direcció que no sigui coordenada. Observem que, si la multipliquem per  $r^2$ , la primera equació es pot escriure en la forma

$$(r^2u')' = 0, \quad \text{és a dir, } r^2u' = c,$$

on  $c$  és una constant. D'altra banda, si  $\theta(s)$  és l'angle que forma la geodèsica amb els paral·lels que va tallant,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , es té

$$\cos \theta = \frac{|\langle \varphi_u, u' \varphi_u + v' \varphi_v \rangle|}{\sqrt{E}} = |ru'|,$$

per la qual cosa, l'equació anterior s'escriu en la forma

$$r \cos \theta = |c| \quad (= cnt).$$

Aquesta relació es coneix com a *teorema de Clairaut*.

El teorema de Clairaut té la següent interpretació mecànica: les geodèsiques són les trajectòries de les partícules sobre les que no actuen altres forces que la normal, que l'obliga a mantenir-se en la superfície. En una superfície de revolució, la força normal en un punt  $p$  està en el pla que conté l'eix de gir i, per tant, el seu moment al voltant d'aquest eix és zero i, en conseqüència, el moment angular d'aquesta partícula és constant. Però, si la partícula es mou amb velocitat constant al llarg de la geodèsica, el component de la velocitat al llarg del paral·lel que passa per  $p$  és  $\cos \theta$  i, per tant, el moment angular és proporcional a  $r \cos \theta$ .

En general no és possible resoldre les equacions de les geodèsiques de forma explícita. En el cas de les superfícies de revolució es pot demostrar que aquestes equacions es poden resoldre per quadratures (integrals); amb el teorema de Clairaut hem vist com, en alguns casos, podem extreure informació geomètrica de les equacions sense resoldre-les completament.

**5.2.8** En els exemples anteriors hem vist que les equacions no són independents. Per exemple, en el cas dels meridians hem vist que una equació se satisfà automàticament mentre que l'altra reflecteix que el paràmetre és un múltiple de l'arc. Aquest fet és general (la prova del qual deixem com a exercici): *si  $\alpha$  està parametritzada per l'arc i no és una corba coordenada, la segona equació de les geodèsiques és conseqüència de la primera.*

### 5.3 L'aplicació exponencial: propietats minimal de les geodèsiques

Sigui  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superfície regular orientada i  $p \in S$ . Si  $w \in T_p S$ , denotem per  $\gamma_w : (-\varepsilon_w, \varepsilon_w) \rightarrow S$  l'única geodèsica de  $S$  tal que  $\gamma_w(0) = p$  i  $\gamma'_w(0) = w$ . Sigui

$$\mathcal{E}_p = \{w \in T_p S \mid \gamma_w(t) \text{ està definida en } t = 1\}.$$

**5.3.1 Definició.** Es defineix l'*aplicació exponencial de  $S$  en  $p$*  segons

$$\begin{aligned} \exp_p : \mathcal{E}_p &\longrightarrow S \\ w &\longmapsto \gamma_w(1) \end{aligned}$$

Abans d'establir les propietats de l'exponencial observem que reescalant la geodèsica en la direcció de  $w$  podem suposar que està definida a  $t = 1$ . Més concretament,

**5.3.2 Lema.** Si  $0 \neq c \in \mathbb{R}$ , aleshores la geodèsica  $\gamma_{cw}(t)$  està definida en l'interval

$$\gamma_{cw} : \left(-\frac{\varepsilon_w}{c}, \frac{\varepsilon_w}{c}\right) \longrightarrow S,$$

i satisfà

$$\gamma_{cw}(t) = \gamma_w(ct).$$

*Demostració.* Considerem la corba  $\bar{\gamma}_w(t) := \gamma_w(ct)$ . Aleshores,  $\bar{\gamma}_w(0) = p$  i  $\bar{\gamma}'_w(0) = c\gamma'_w(0) = cw$ . A més,  $\bar{\gamma}$  és una geodèsica, ja que

$$\frac{D\bar{\gamma}'_w(t)}{dt} = c^2 \frac{D\gamma'_w(t)}{dt} = 0.$$

Del teorema d'existència i unicitat se segueix que  $\bar{\gamma}_w(t) = \gamma_{cw}(t)$ . ■

**5.3.3 Observacions.** (1) El lema anterior assegura que l'exponencial està definida en totes les direccions del pla tangent, només cal ajustar la velocitat. A més, en resulta que  $\mathcal{E}_p$  és un conjunt estrellat respecte de l'origen, ja que si  $\exp_p$  està definida a  $w$  també ho estarà per a  $tw$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

(2) La geodèsica per  $p$  en la direcció  $w$  serà

$$\gamma_w(t) = \exp_p(tw) = \gamma_{tw}(1).$$

D'aquesta manera es produeix una dualitat *direcció tangent - geodèsica*: analitzar el comportament de la geodèsica respecte de  $t$  és equivalent a analitzar el comportament de  $\gamma_{tw}(1)$  respecte del vector tangent  $tw$ .

(3) Es té

$$\gamma_w(1) = \gamma_w\left(\frac{|w|}{|w|}\right) = \gamma_{\frac{w}{|w|}}(|w|),$$

i, per tant, la longitud de la geodèsica  $\gamma_w$  entre  $p$  i  $q = \exp_p(w)$  és  $|w|$ .

**5.3.4 Propietats de l'aplicació exponencial.** El conjunt  $\mathcal{E}_p$  i l'aplicació  $\exp_p$  satisfan:

- (1)  $\mathcal{E}_p \subset T_p S$  és un entorn obert estrellat de 0.
- (2) L'aplicació  $\exp_p : \mathcal{E}_p \rightarrow S$  és diferenciable en un entorn obert de  $p$ .
- (3) La diferencial  $d(\exp_p)_0 : T_p S \rightarrow T_p S$  és un isomorfisme i, per tant,  $\exp_p$  és un difeomorfisme local en  $p$ .

*Demostració.* Les propietats (1) i (2) són conseqüència del teorema de dependència de les solucions d'una edo de les condicions inicials. En efecte, aquest resultat, aplicat al cas de les geodèsiques assegura l'existència de  $\varepsilon, \delta > 0$  i una aplicació diferenciable

$$\begin{aligned} \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B_\delta(0) &\longrightarrow S \\ (t, w) &\longmapsto \gamma_w(t) \end{aligned}$$

Si prenem  $c = \varepsilon/2$ , aleshores  $\gamma_{cw}(t) = \gamma_{\frac{\varepsilon}{2}w}(t) = \gamma_w(\frac{\varepsilon}{2}t)$  està definida per

$$|t| < 2, \quad |w| < \delta.$$

Així,  $\mathcal{E}_p$  conté  $p$  a l'interior i l'exponencial està definida i és diferenciable a  $B_{\frac{\varepsilon\delta}{2}}(0)$ .

Per demostrar (3), considerem la corba del pla tangent donada per  $\alpha(t) = tw$ . Aleshores,

$$\exp_p(\alpha(t)) = \exp_p(tw) = \gamma_w(t),$$

i, per tant, segons la definició d'aplicació diferencial, trobem

$$d(\exp_p)_0(w) = \frac{d}{dt} \exp_p \alpha(t)|_{t=0} = \gamma'_w(0) = w,$$

és a dir,  $d(\exp_p)_0 = id$ . ■

**5.3.5 Definició.** Anomenarem *geodèsiques radials per  $p$*  a la imatge de les rectes (de fet segments de recta)  $tw$  de  $T_p S$  per l'aplicació exponencial  $\exp_p$ , i *cercles geodèsics* a la imatge de les circumferències de centre 0 de  $T_p S$ .

Observeu que malgrat el nom, els cercles geodèsics no són corbes geodèsiques. Donat  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(0) \subset \mathcal{E}_p$ , denotarem per  $B_\delta(p)$  el disc geodèsic imatge de  $B_\delta(0) \subset T_p S$  per l'aplicació exponencial. Per defecte, en els raonament que segueixen, prendrem  $\delta$  de manera que  $\overline{B}_\delta(0) \subset \mathcal{E}_p$  i que, per tant, la vora  $\partial \overline{B}_\delta(0)$  sigui difeomorfa a la vora  $\partial B_\delta(p)$ .

Atès que l'aplicació exponencial és un difeomorfisme local al voltant de  $p$ , la podem utilitzar per traslladar diferents sistemes de coordenades del pla tangent a la superfície.

**5.3.6 Definició.** Direm que un entorn  $V \subset S$  de  $p$  és un *entorn normal* si  $V = \exp_p(U)$  tal que  $\exp_p : U \rightarrow V$  és un difeomorfisme. En un entorn normal  $V$  considerarem els sistemes de coordenades següents:

- (1) *coordenades normals* de  $S$  en  $p$  corresponents, via l'aplicació exponencial, a un sistema de coordenades rectangulars del pla tangent  $T_p S$ .
- (2) *coordenades geodèsiques polars* corresponents, via l'aplicació exponencial, a les coordenades polars del pla tangent.

**5.3.7** Així, si  $e_1, e_2$  és una base ortonormal de  $T_p S$  i  $w = ae_1 + be_2$ , les coordenades normals de  $q = \exp_p(w)$  són  $(a, b)$ . Observem que els eixos de coordenades es transformen en geodèsiques de  $S$  i que en el punt  $p$  se satisfà

$$I(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

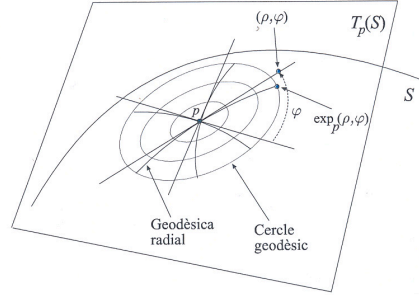


Figura 5.1: Aplicació exponencial i coordenades polars.

Pel que fa a les coordenades geodèsiques polars  $(r, \theta)$ , estaran ben definides en un obert del tipus  $r > 0, 0 < \theta < 2\pi$ , que no conté la geodèsica radial que correspondria a l'angle  $\theta = 0$ . Les corbes coordenades corresponents són les geodèsiques radials i els cercles geodèsics.

La proposició següent estableix les propietats de la primera forma fonamental expressada en coordenades polars geodèsiques.

**5.3.8 Proposició.** *Sigui  $\varphi : U \setminus \ell \longrightarrow V \setminus L$  un sistema de coordenades polars geodèsiques. Aleshores,*

$$E = 1, \quad F = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} G = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{G})_r = 1.$$

*Demostració.* Per la pròpia definició, les corbes  $\theta = \text{cnt}$  són les radials geodèsiques i, per tant,  $E = 1$ .

Provem que  $F = 0$ . Les equacions de les geodèsiques en el sistema de coordenades polars s'escriuen

$$\begin{aligned} r'' + \Gamma_{11}^1 (r')^2 + 2\Gamma_{12}^1 r' \theta' + \Gamma_{22}^1 (\theta')^2 &= 0, \\ \theta'' + \Gamma_{11}^2 (r')^2 + 2\Gamma_{12}^2 r' \theta' + \Gamma_{22}^2 (\theta')^2 &= 0. \end{aligned}$$

i com les corbes  $\theta = \text{cnt}$  són geodèsiques, deduïm que  $\Gamma_{11}^2 = 0$ . Ara, tenint present que  $E = 1$ , del sistema lineal que determina  $\Gamma_{11}^i$  deduïm

$$\begin{aligned} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}E_r = 0 \implies \Gamma_{11}^1 = 0, \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{11}^2 = 0 \implies 0 = F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_r - \frac{1}{2}E_\theta \implies F_r = 0, \end{aligned}$$

és a dir,  $F$  no depèn de  $r$ . Així, per provar que  $F = 0$  basta veure que el límit de  $F(\theta)$  sobre una geodèsica radial  $\theta = \text{cnt}$ , quan  $r$  tendeix a zero, és zero.

Sigui  $q \in V$  un punt de l'entorn normal  $V$ ,  $\gamma(s)$  la geodèsica radial que va de  $p$  a  $q$  parametritzada per l'arc. Sigui  $\alpha(\theta)$  el cercle geodèsic que passa per  $q$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ; si  $q = p$ ,  $\alpha(\theta)$  és la corba constant  $\alpha(\theta) = p$ . Aleshores,

$$F(q) = F(r, \theta) = \left\langle \frac{d\alpha}{d\theta}, \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle.$$

Mentre que  $F(r, \theta)$  no està definit per a  $r = 0$ , si fixem la geodèsica radial  $\theta = \text{cnt}$ , el segon membre de la igualtat anterior està definit sobre tot punt d'aquesta geodèsica, ja que  $\gamma$  passa per  $p$  en l'instant  $s = 0$  i  $\alpha$  és constant a  $p$ . Atès que a  $p$  se satisfà  $d\alpha/d\theta = 0$ , en resulta

$$\lim_{r \rightarrow 0} F(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \left\langle \frac{d\alpha}{d\theta}, \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle = 0.$$

Calculem ara el límit a  $p$  de  $G$ : considerem el sistema rectangular de coordenades normals

$$\bar{u} = r \cos \theta, \quad \bar{v} = r \sin \theta.$$

Aleshores, es té

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{EG - \bar{F}^2} \cdot \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(r, \theta)} = r \sqrt{EG - \bar{F}^2},$$

que, segons els càlculs anteriors, es redueix a

$$\sqrt{G} = r \sqrt{EG - \bar{F}^2}, \quad r \neq 0,$$

amb la qual cosa resulta

$$\lim_{r \rightarrow 0} G = 0,$$

atès que les coordenades rectangulars tenen per primera forma fonamental en  $p$  la matriu identitat. A més, es té

$$(\sqrt{G})_r = \sqrt{EG - \bar{F}^2} + r \left( \sqrt{EG - \bar{F}^2} \right)_r \implies \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{G})_r = 1. \quad \blacksquare$$

El fet que  $F = 0$  és conegut com a *lema de Gauss*, i es pot enunciar sense fer referència a les coordenades polars.

**5.3.9 Corol·lari.** *Les geodèsiques radials i els cercles geodèsics són ortogonals.* ■



### *Propietats minimal de les geodèsiques*

Ens proposem usar les coordenades polars geodèsiques per analitzar la relació entre les geodèsiques i les corbes de la superfície que minimitzen la distància entre dos punts.

Sigui  $S$  una superfície connexa. Atès que  $S$  és arc-connexa, per a qualssevol punts  $p, q \in S$  existeix una corba contínua  $\alpha : I \rightarrow S$  amb  $\alpha(0) = p, \alpha(1) = q$ . En general, una corba contínua no té perquè ser de longitud finita, per la qual cosa una tal trajectòria  $\alpha$  pot no ser convenient per mesurar la distància entre  $p$  i  $q$ .

**5.3.10 Definició.** Direm que una corba contínua  $\alpha : I \rightarrow S$  és diferenciable a trossos si existeix una partició finita de l'interval  $I$ ,  $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_k = 1$  tal que  $\alpha|_{[s_i, s_{i+1}]}$  és diferenciable.

Per a una corba diferenciable a trossos definim la longitud segons

$$\ell(\alpha) = \sum_{i=0}^{k-1} \ell(\alpha|_{[s_i, s_{i+1}]}).$$

**5.3.11 Observació.** Dos punts qualssevol  $p, q \in S$  d'una superfície connexa  $S$  poden unir-se per una corba diferenciable a trossos.

En efecte, sigui  $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow S$  una corba (contínua) que uneix  $p$  i  $q$ . Considerem un recobriment de  $S$  per entorns coordinats  $(U_i, \varphi_i)$  i, per a cada  $t \in I$ , un interval obert  $I_t \subset I$  tal que  $\alpha(I_t) \subset \varphi_i(U_i)$  per a algun  $i$ . Per la compacitat de  $I$ , existirà un subrecobriment finit  $I_1, \dots, I_n$  de  $I$ , és a dir, hi ha una partició  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1$  tal que  $\alpha(t_i, t_{i+1}) \subset \varphi_j(U_j)$  per a algun  $j$ . Ara,  $\alpha(t_i)$  i  $\alpha(t_{i+1})$  poden unir-se per una corba diferenciable i es conclou fàcilment l'afirmació realitzada.

Definim ara la *distància intrínseca de la superfície  $S$*  segons

$$d_S(p, q) = \inf \ell(\alpha_{p,q}),$$

on  $\alpha_{p,q}$  recorre el conjunt de corbes diferenciables a trossos que uneixen  $p$  i  $q$ . És un exercici demostrar que  $d_S$  defineix una distància a  $S$  i que la topologia associada és la mateixa que la topologia de subespai  $S \subset \mathbb{R}^3$ .

**5.3.12 Definició.** Direm que una corba diferenciable a trossos  $\alpha_{p,q}$  entre  $p$  i  $q$  és de *mínima distància* (o *minimal*, per simplificar) si

$$\ell(\alpha_{p,q}) = d_S(p, q).$$

**5.3.13 Proposició.** *Sigui  $\delta > 0$  tal que  $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow B_\delta(p) \subset S$  és un difeomorfisme. Aleshores, per a tot  $q \in B_\delta(p)$  la geodèsica radial de  $p$  a  $q$  és l'única corba minimal de  $S$  entre  $p$  i  $q$ , (llevat de reparametritzacions).*

*Demostració.* Sigui  $w \in T_p S$ ,  $\ell = |w| < \delta$  tal que  $\exp_p(w) = q$  i  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow S$  la geodèsica radial parametritzada per l'arc que uneix  $p$  i  $q$ . Volem veure que si  $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S$  és una altra corba entre  $p$  i  $q$  diferenciable a trossos, aleshores  $\ell(\alpha) \geq \ell(\gamma)$  i que la igualtat es dona només si  $\alpha = \gamma$ .

Suposem, en primer lloc, que la traça de  $\alpha$  està continguda a  $B_\delta(p)$ . Per comparar les longituds de  $\alpha$  i  $\gamma$  anem a descomposar  $\alpha'$  en una component radial i una altra tangencial als cercles geodèsics. Denotem per  $\mathbf{r}$  el camp vectorial unitari de  $T_p(S) \setminus \{0\}$  que és tangent als radis que surten de l'origen. Aleshores, el camp vectorial  $\alpha'(s)$  definit per  $0 < s \leq \ell$  admet una descomposició

$$\alpha'(s) = a(s)\mathbf{r}|_{\alpha(s)} + w(s),$$

on  $a(s)$  és una funció diferenciable i  $w(s)$  és un camp ortogonal a  $\mathbf{r}$ .

Pel lema de Gauss ( $F = 0$  en coordenades polars geodèsiques), el camp  $w(s)$  és tangent als cercles geodèsics de  $B_\delta(p)$ . Així, si considerem la funció

$$\begin{aligned} r : B_\delta(p) \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ q &\mapsto |\exp_p^{-1}(q)| \end{aligned}$$

que és  $C^\infty$ , veiem que  $dr_q(w(s)) = 0$ , ja que  $r$  és constant sobre els cercles geodèsics.

A més, si  $q = \exp_p(w)$ , aleshores

$$dr_q(\mathbf{r}|_q) = dr_{\exp_p(w)}\left(\frac{\gamma'_w(1)}{|w|}\right) = \frac{1}{|w|} \frac{d}{ds}(s|w|) = 1,$$

amb la qual cosa trobem que

$$(r \circ \alpha)'(s) = a(s).$$

Sigui  $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_k = \ell$  una descomposició de  $I$  tal que  $\alpha|_{[s_i, s_{i+1}]}$  és regular. Aleshores,

$$\begin{aligned} \ell(\alpha) &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \sqrt{a(s)^2 + |w(s)|^2} ds \geq \sum_{i=0}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \sqrt{a(s)^2} ds \\ &\geq \sum_{i=0}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} a(s) ds = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (r\alpha)'(s) ds \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (r(\alpha(s_{i+1})) - r(\alpha(s_i))) = r(q) - r(p) = \ell(\gamma). \end{aligned}$$

A més, perquè es doni la igualtat s'ha de satisfer que  $w(s) = 0$  i  $a(s) \geq 0$  per a tot  $s$ , cas que correspon a  $\alpha' = \mathbf{r}_\alpha$ , ja que la corba està parametritzada per l'arc; però, aleshores, per la unicitat de les geodèsiques respecte de condicions inicials,  $\alpha$  coincideix amb la radial  $\gamma$  de  $p$  a  $q$ .

Si la traça de  $\alpha$  no està continguda a  $B_\delta(p)$  procedim de la forma següent: sigui  $t_1$  el primer valor del paràmetre tal que  $\alpha(t_1)$  talla el cercle geodèsic  $\partial B_\delta(p)$ . Pels casos anteriors, la radial entre  $p$  i  $\alpha(t_1)$ , denotem-la per  $\bar{\gamma}$ , és la corba minimal entre aquests punts continguda a  $B_\delta(p)$ , però, aleshores

$$\ell(\alpha) \geq \ell(\alpha(0, t_1)) \geq \ell(\bar{\gamma}) \geq \ell(\gamma),$$

on en la darrera igualtat hem usat que  $q$  és interior a  $B_\delta(p)$  mentre que  $x$  està sobre la frontera. ■

**5.3.14 Teorema.** (1) *Sigui  $\alpha : I \rightarrow S$  una corba diferenciable a trossos minimal entre  $p$  i  $q$ . Aleshores, quan la parametritzem per l'arc,  $\alpha$  és una geodèsica i, en particular, és diferenciable.*

(2) *Sigui  $\gamma : [a, b] \rightarrow S$  una geodèsica parametritzada per l'arc. Aleshores,  $\gamma$  és, localment, una corba minimal; és a dir, per a tot  $p \in \gamma[a, b]$  hi ha un entorn  $U$  tal que per a qualsevol  $q \in U \cap \gamma[a, b]$ ,  $\gamma$  és el camí més curt entre  $p$  i  $q$  a  $S$ .*

*Demostració.* (1) Sigui  $t_0 \in I$  tal que  $\alpha(t_0) = p$  i  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(p)$  és un entorn normal de  $p$ . Si  $q'$  és el primer punt d'intersecció de  $\alpha$  i el cercle geodèsic  $\partial B_\delta(p)$ , aleshores  $\alpha$  ha de coincidir amb la radial de  $p$  a  $q'$ , ja que ambdues corbes són minimal entre aquests dos punts, i podem aplicar la unicitat de la proposició 5.3.13. Això implica que, localment,  $\alpha$  és una geodèsica, però com la propietat de ser geodèsica és local,  $\alpha$  és una geodèsica.

(2) Basta prendre  $B_\delta(p)$  un entorn geodèsic, ja que aleshores,  $\gamma$  és una geodèsica radial de  $B_\delta(p)$  i s'aplica la proposició. ■

**5.3.15 Exemples.** (1) El resultat anterior assegura que si hi ha una corba minimal entre dos punts, aleshores aquesta corba és una geodèsica. No estableix, però, l'existència de corbes minimal entre dos punts. De fet, hi ha superfícies sobre les quals l'existència de corbes minimal no sempre està assegurada. Per exemple, si considerem  $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , aleshores no hi ha cap corba minimal entre els punts  $p = (-1, 0)$  i  $q = (1, 0)$ , ja que hauria de ser un segment de recta, que no es pot completar per la falta de l'origen.

(2) La segona asserció del teorema afirma que, localment, les geodèsiques minimitzen la distància. Globalment no podem fer cap afirmació general ja que, per exemple, si  $p, q$  són dos punts sobre el mateix meridià de l'hemisferi nord de l'esfera i  $\gamma$  és l'arc del

meridià que va de  $p$  a  $q$  passant pel pol sud, aleshores  $\gamma$  és una geodèsica, però no és una corba minimal entre  $p$  i  $q$ .

**Apèndix: una altra demostració de que les corbes minimals són geodèsiques**

Per acabar aquesta secció anem a donar una prova alternativa de la propietat (1) del teorema 5.3.14. Aquesta demostració, que no fa us de les coordenades polars geodèsiques, és més pròxima al càlcul variacional, que és la tècnica que analitza les funcions que minimitzen certs funcionals.

**5.3.16 Teorema.** *Sigui  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$  una corba de minimal entre  $p = \alpha(a)$  i  $q = \alpha(b)$ , parametritzada per l'arc. Aleshores,  $\alpha$  és una geodèsica.*

*Demostració.* Provarem que  $\kappa_g = 0$  i per a fer-ho analitzarem la variació de les longituds d'una deformació de la corba  $\alpha$ .

Més concretament: suposem que hi ha un  $s_0 \in [a, b]$  amb  $\kappa_g(s_0) \neq 0$ . Per continuïtat, existiran  $c, d$  tals que

- $a < c < s_0 < d < b$ ,
- $\kappa_g(s) \neq 0$ ,  $s \in [c, d]$ ,
- $\alpha([c, d]) \subset \varphi(U)$ ,

on  $\varphi : U \rightarrow S$  és una parametrització regular. Pertorbem  $\alpha$  en la direcció  $N \wedge \mathbf{t}$  en la forma següent: prenem  $\lambda(s) = (s - c)(d - s)$  en l'interval  $[c, d]$ , que satisfà  $\lambda(c) = \lambda(d) = 0$ ,  $\lambda(s) \neq 0$  si  $s \neq c, d$  i  $\lambda(s)\kappa_g(s) \geq 0$ , i considerem la família de corbes

$$\alpha_t(s) = \varphi(u(s) + t\bar{u}(s), v(s) + t\bar{v}(s)),$$

on  $\bar{u}\varphi_u + \bar{v}\varphi_v = \lambda(s)(N \wedge \mathbf{t})$ .

Escrivint  $\alpha(t, s) = \alpha_t(s)$ , considerem  $\alpha$  com a funció de dues variables. La longitud de  $\alpha_t$  entre  $c$  i  $d$  és

$$\ell(t) = \int_c^d \sqrt{\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle} ds,$$

i, per tant,

$$\ell'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_c^d \sqrt{\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle} ds = \int_c^d \frac{\left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle}} ds.$$

Ara, observem que per a  $t = 0$ ,  $|\alpha'(s)| = 1$ , ja que  $s$  és el paràmetre arc i, com  $\alpha(s)$  és un minimal d'aquest funcional,  $\ell'(0) = 0$ . Però, aleshores

$$\begin{aligned}
0 = \ell'(0) &= \int_c^d \left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle_{|t=0} ds \\
&= \int_c^d \left( \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle_{|t=0} - \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} \right\rangle_{|t=0} \right) ds \\
&= \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle_{|t=0} \Big|_c^d - \int_c^d \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} \right\rangle_{|t=0} ds \\
&= - \int_c^d \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} \right\rangle_{|t=0} ds = - \int_c^d \langle \lambda N \wedge \mathbf{t}, \kappa_g N \wedge \mathbf{t} + \kappa_n N \rangle ds \\
&= - \int_c^d \lambda \kappa_g ds < 0,
\end{aligned}$$

el què és una contradicció. ■

## 5.4 El teorema de Hopf-Rinow

En la secció anterior hem vist que les corbes minimals són geodèsiques, però no hem establert condicions que assegurin la seva existència. En aquesta secció presentem el teorema de Hopf-Rinow, que dóna condicions suficients per a l'existència de geodèsiques minimals entre dos punts.

**5.4.1 Definició.** Direm que una superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  és *geodèsicament completa* si tota geodèsica  $\gamma : I \rightarrow S$  pot estendre's a una geodèsica  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$ .

**5.4.2 Teorema de Hopf-Rinow.** *Sigui  $S$  una superfície connexa i geodèsicament completa. Aleshores, per a qualssevol  $p, q \in S$  existeix una geodèsica minimal  $\gamma : I \rightarrow S$  tal que  $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ .*

*Demostració.* La idea és "llançar" una geodèsica radial des de  $p$  en la "direcció" de  $q$  i aprofitar la completessa per allargar-la fins arribar a  $q$ .

Com determinem la "direcció" de  $q$ ? Sigui  $\delta > 0$  tal que l'exponencial defineix un difeomorfisme  $\overline{B}_\delta(0) \simeq \overline{B}_\delta(p)$  i  $\Sigma = \partial B_\delta(p)$ . Donat que  $\Sigma$  és compacte i la distància a  $q$  és una funció contínua, existeix  $x_0 \in \Sigma$  tal que

$$d_S(x_0, q) \leq d_S(x, q), \quad x \in \Sigma.$$

El punt  $x_0$  ens dóna la direcció de  $q$ : sigui  $\gamma$  la radial (parametitzada per l'arc) de  $p$  a  $x_0$  i l'estenem fins a obtenir una corba de longitud  $\ell = d_S(p, q)$ , és a dir,

$$\gamma : [0, \ell] \longrightarrow S.$$

Volem provar ara que  $\gamma(\ell) = q$ . Per fer-ho demostrarem que, per a tot  $s \in [0, \ell]$ , se satisfà

$$d_S(\gamma(s), q) = \ell - s, \quad (\dagger)$$

amb la qual cosa  $d_S(\gamma(\ell), q) = 0$ , és a dir,  $\alpha(\ell) = q$ .

Per demostrar  $(\dagger)$ , és suficient provar que el subconjunt

$$A = \{s \in [0, \ell] \mid d_S(\gamma(s), q) = \ell - s\} \subset [0, \ell]$$

és no buit, obert i tancat, doncs per connexió conclourem que  $A = [0, \ell]$ . Que  $A$  és tancat resulta de la continuïtat de la distància a  $q$ .

Provem que  $A \neq \emptyset$  veient que  $\delta \in A$ . En efecte, tota corba  $\alpha$  de  $p$  a  $q$  talla  $\Sigma$ , per tant

$$\begin{aligned} d_S(p, q) &= \inf \ell(\alpha_{p,q}) = \inf_{x \in \Sigma} (\inf \ell(\alpha_{p,x}) + \inf \ell(\alpha_{x,q})) \\ &= \inf_{x \in \Sigma} (d_S(p, x) + d_S(x, q)) = \inf_{x \in \Sigma} (\delta + d_S(x, q)) \\ &= \delta + d_S(x_0, q). \end{aligned}$$

És a dir,  $d_S(x_0, q) = d_S(\gamma(\delta), q) = \ell - \delta$ , que no és altra que la igualtat  $(\dagger)$  per  $s = \delta$ .

Provem ara que si  $s_0 \in A$ , aleshores existeix  $\delta' > 0$  amb  $s_0 + \delta' \in A$ : prenem un disc geodèsic de radi  $\delta'$  centrat en  $\gamma(s_0)$  i sigui  $x'_0$  el punt de la vora d'aquest disc de mínima distància a  $q$ . Com  $s_0 \in A$ , es té

$$\ell - s_0 = d_S(\gamma(s_0), q) = \delta' + d_S(x'_0, q) \implies d_S(x'_0, q) = \ell - s_0 - \delta'.$$

Atès que

$$d_S(p, x'_0) \geq d_S(p, q) - d_S(x'_0, q),$$

es té

$$d_S(p, x'_0) \geq \ell - (\ell - s_0 - \delta') = s_0 + \delta'.$$

Per tant, la corba diferenciable a trossos que consisteix en seguir  $\gamma$  entre 0 i  $s_0$  i continuar per la radial des d'aquest punt a  $x'_0$  minimitza la distància entre  $p$  i  $x'_0$  i, per tant, és una geodèsica, que necessàriament ha de coincidir amb  $\gamma$ . És a dir,  $x'_0 = \gamma(s_0 + \delta')$ , amb la qual cosa  $s_0 + \delta' \in A$ . ■

**5.4.3 Corol·lari.** Si  $S$  és una superfície connexa i geodèsicament completa, aleshores l'aplicació exponencial  $\exp_p : T_p S \longrightarrow S$  és exhaustiva, per a tot punt  $p \in S$ . ■

**5.4.4 Corol·lari.** *Si  $S$  és una superfície connexa, geodèsicament completa i acotada per la mètrica de  $d_S$ , aleshores  $S$  és compacta.*

*Demostració.* Pel corol·lari anterior, l'exponencial està definida a tot el pla tangent  $T_p S$ . Com la superfície és acotada,  $S = \exp_p(\overline{B}_\delta(0))$ , per a  $\delta > 0$  prou gran, i basta observar que  $\overline{B}_\delta(0)$  és compacte. ■

Per tal que el teorema de Hopf-Rinow sigui útil cal disposar d'exemples de superfícies geodèsicament completes. Dels teoremes de prolongació de solucions d'*edos* es dedueixen els dos resultats següents, que enunciem sense demostració.

**5.4.5 Proposició.** *Una superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  tancada és geodèsicament completa.* ■

**5.4.6 Corol·lari.** *Una superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  compacta és geodèsicament completa.* ■





## El teorema de Gauss-Bonnet

És ben conegut que la suma dels angles d'un triangle del pla euclidià és  $\pi$ . El primer objectiu d'aquest capítol és generalitzar aquest resultat a triangles geodèsics sobre una superfície. En general, la suma dels angles d'un triangle geodèsic no serà  $\pi$ . Per exemple, prenent un triangle sobre l'esfera format per dos meridians, que es tallen en un angle  $\theta$  al pol nord, i l'equador, la suma dels angles és exactament  $\pi + \theta$ , superior a  $\pi$ . De què depèn la suma dels angles d'un triangle geodèsic? Veurem que la curvatura de Gauss  $K$  de la superfície permet donar una resposta explícita.

### 6.1 Algunes qüestions preliminars

En aquesta secció reunim algunes nocions i resultats preliminars que intervindran en l'enunciat i demostració del teorema de Gauss-Bonnet. En tot el que segueix  $S$  denotarà una superfície regular orientada de  $\mathbb{R}^3$ .

**6.1.1 Corbes diferenciables a trossos i regions simples.** Recordem que una corba contínua  $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S$  diem que és *diferenciable a trossos* si existeix una partició de l'interval  $[0, \ell]$ ,

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = \ell,$$

tal que  $\alpha$  és regular en els subintervalls  $[s_{i-1}, s_i]$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Als punts  $\alpha(s_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , els anomenarem *vèrtexs* de  $\alpha$ .

Si el paràmetre  $s$  és el paràmetre arc en cadascun d'aquests subintervalls, direm que  $\alpha$  és una corba diferenciable a trossos parametritzada per l'arc. Direm que la corba  $\alpha$  és *tancada* si  $\alpha(0) = \alpha(\ell)$  i *simple* si és injectiva a  $[0, \ell]$ .

Sigui  $R \subset S$  una regió de  $S$ , és a dir, l'adherència d'un obert connex. Direm que  $R \subset S$  és una *regió simple* si  $R$  és homeomorfa al disc unitat (tancat) del pla i la frontera  $\partial R$

és la traça d'una corba tancada simple i diferenciable a trossos  $\alpha : I \rightarrow S$ . Direm que una regió  $R \subset S$  és *regular* si  $\partial R$  està formada per un nombre finit de corbes diferenciables tancades i simples.

Si la superfície  $S$  està orientada pel camp de vectors normals  $N$  i  $R$  és una regió simple, direm que una parametrització  $\alpha$  de la vora  $\partial R$  és compatible amb l'orientació (o que l'orientació de  $\alpha$  és positiva), si situant-nos segons el vector normal sobre  $\partial R$  i recorrent  $\alpha(t)$ , la superfície  $S$  queda a l'esquerra. Equivalentment, el sentit de recorregut ve determinat per  $N$  i la regla de la mà dreta (vegeu la figura).

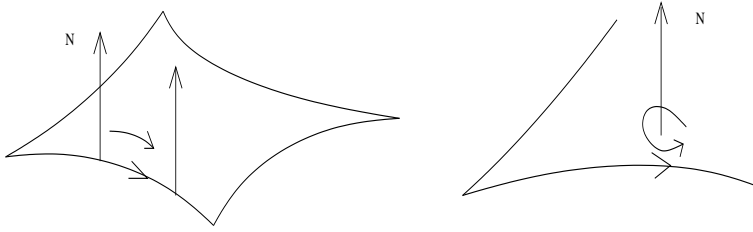


Figura 6.1: Regla de la mà dreta.

En la demostració del teorema de Gauss-Bonnet utilitzarem el teorema de Stokes en la seva versió del pla, el recordem.

*Teorema de Green-Riemann.* Sigui  $D$  una regió simple del pla, i sigui  $C = \partial D$  la corba que l'envolta. Sigui  $F = (P, Q)$  un camp vectorial, derivable amb continuïtat a  $D$ . Aleshores se satisfà que

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

on  $C^+$  indica que recorrem la corba  $C$  en sentit antihorari (positiu respecte del vector normal  $N = (0, 0, 1)$ ).

**6.1.2 Determinació de l'angle i índex de rotació.** Si  $\alpha(s)$  és una corba regular tancada de  $S$ ,  $a \leq s \leq b$ , es defineix l'índex de rotació  $\rho(\alpha)$  del vector tangent al llarg de  $\alpha$  com el grau de l'aplicació

$$\begin{aligned} [a, b] &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ s &\longmapsto \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|} \end{aligned}$$

Si, a més, la corba està parametritzada per l'arc, l'aplicació anterior és, simplement,  $s \mapsto (u'(s), v'(s))$ , i segons la definició del grau que hem vist en el curs de Topologia, si

$\theta(s)$  és un aixecament d'aquesta aplicació, es té

$$\rho(\alpha) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)).$$

En el cas que ens ocupa, en el qual la corba és regular (i no solament contínua), es pot donar un aixecament explícit  $\phi(s)$ : en efecte, si escollim un angle  $\phi_0$  tal que  $u'(s_0) = \cos \phi_0, v'(s_0) = \sin \phi_0$ , per a  $s_0 \in [a, b]$ , aleshores és un exercici elemental provar que

$$\phi(s) = \phi_0 + \int_{s_0}^s (u'v'' - u''v')dt$$

satisfà

$$u'(s) = \cos \phi(s), \quad v'(s) = \sin \phi(s).$$

Analitzem ara el cas d'una corba tancada diferenciables a trossos. En els trams regulars d'una d'aquestes corbes,  $\alpha$ , podem utilitzar la fórmula anterior per definir una funció de variació de l'angle,  $\phi(s)$ . En els vèrtexs, però,  $\alpha$  deixa de tenir una tangent ben definida. Atès que  $\alpha$  és regular en els subintervalls entre els vèrtexs, en cadascun d'ells tenim ben definits els vectors tangents

$$\begin{aligned} \alpha'_-(s_i) &= \lim_{s \rightarrow s_i^-} \alpha'(s) \neq 0, \\ \alpha'_+(s_i) &= \lim_{s \rightarrow s_i^+} \alpha'(s) \neq 0. \end{aligned}$$

Definim l'angle exterior  $\theta_i$  en el vèrtex  $\alpha(s_i)$  com l'angle orientat entre  $\alpha'_-(s_i)$  i  $\alpha'_+(s_i)$ , determinat entre  $[-\pi, \pi]$ . Això és: si aquests vectors són linealment independents, considerem l'angle  $\theta_i$  que determinen, escollint el signe segons que la base  $\alpha'_-(s_i), \alpha'_+(s_i), N$  de  $\mathbb{R}^3$  sigui directa o inversa.

En el cas en què  $\alpha'_-(s_i)$  i  $\alpha'_+(s_i)$  són linealment dependents, l'angle satisfà  $|\theta_i| = \pi$ . Per determinar el signe, ens situem "una mica abans i una mica després del vèrtex": observem que existeix  $\varepsilon'$  tal que el triedre  $\alpha'(s_i - \varepsilon), \alpha'(s_i + \varepsilon), N$  no canvia de signe per a  $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ , i escollim el signe en funció d'aquest darrer.

**6.1.3 Teorema de l'índex de Hopf.** *Amb les notacions anteriors, si  $\alpha$  recorre la vora d'una regió simple  $R \subset S$ ,*

$$\sum_{i=1}^k (\phi(s_i) - \phi(s_{i-1})) + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi.$$

*Demostració.* No farem la prova d'aquest resultat. Tot i això, podem donar la idea de la demostració quan  $\alpha$  és regular. En aquest cas el resultat estableix que  $2\pi\rho(\alpha) =$

$\phi(b) - \phi(a) = 2\pi$ , és a dir,  $\rho(\alpha) = 1$ . Sigui  $p$  un punt interior de la regió  $R$ ; com  $\rho(\alpha)$  és un enter i el procés de deformació per homotopia és continu, aquest índex es mantindrà invariant per homotopia. Atès que la regió és simple,  $\alpha$  es deforma homotòpicament sobre una petita circumferència al voltant de  $p$  i, per tant, basta demostrar el teorema per a aquesta corba. Però, aleshores, un càlcul directe acaba la prova. ■

## 6.2 Una expressió per a la curvatura geodèsica

Sigui  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superfície orientada per un camp normal i  $\varphi : U \rightarrow S$  una parametrització regular ortogonal ( $F = 0$ ). Sigui  $\alpha : I \rightarrow \varphi(U) \subset S$  una corba parametritzada per l'arc.

**6.2.1 Proposició.** *Si  $\theta(s)$  és una determinació de l'angle entre els camps vectorials  $\mathbf{t}(s)$  i  $\varphi_u$  al llarg de  $\alpha$ , aleshores la curvatura geodèsica de  $\alpha$  satisfà*

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}(v'G_u - u'E_v) + \theta'(s).$$

*Demostració.* Siguin  $e_1, e_2$  els camps vectorials unitaris

$$e_1 = \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}, \quad e_2 = \frac{\varphi_v}{\sqrt{G}}.$$

Com són camps unitaris i ortogonals, les seves derivades covariants respecte de  $\alpha(t)$  satisfan

$$\frac{De_1}{dt} = be_2, \quad \frac{De_2}{dt} = -be_1,$$

per a certa funció diferenciable  $b(t)$ . Per calcular la funció  $b(t)$  usem la definició de la derivada covariant,

$$\begin{aligned} \frac{De_1}{dt} &= \frac{D\left(\frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}\right)}{dt} = \left(\Gamma_{11}^2 \frac{u'}{\sqrt{E}} + \Gamma_{12}^2 \frac{v'}{\sqrt{G}}\right) \varphi_v \\ &= \left(-\frac{1}{2} \frac{E_v}{\sqrt{EG}} u' + \frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{EG}} v'\right) e_2, \end{aligned}$$

i, per tant,

$$b = \left\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \right\rangle = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{\sqrt{EG}} u' + \frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{EG}} v'. \quad (\dagger)$$

Calculem ara  $b(t)$  d'una altra forma: per l'elecció de  $\theta$  es té  $\alpha'(s) = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$  i, en conseqüència,

$$\kappa \mathbf{n} = \alpha''(s) = -\theta' \sin \theta e_1 + \theta' \cos \theta e_2 + \cos \theta e_1' + \sin \theta e_2'.$$

Així, la curvatura geodèsica, que ve determinada pel component tangencial d'aquesta igualtat, resulta

$$\begin{aligned} \kappa_g(N \wedge \mathbf{t}) &= -\theta' \sin \theta e_1 + \theta' \cos \theta e_2 + \cos \theta \frac{De_1}{dt} + \sin \theta \frac{De_2}{dt} \\ &= -(b + \theta') \sin \theta e_1 + (b + \theta') \cos \theta e_2. \end{aligned}$$

Atès que

$$N \wedge \mathbf{t} = (e_1 \wedge e_2) \wedge (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2,$$

trobem, finalment,

$$\kappa_g = \langle \kappa N \wedge \mathbf{t}, N \wedge \mathbf{t} \rangle = b + \theta',$$

el que juntament amb l'expressió ( $\dagger$ ) que hem calculat de  $b(s)$ , acaba la prova. ■

## 6.3 El teorema local de Gauss-Bonnet

Sigui  $\varphi : U \rightarrow S$  una parametrització regular ortogonal ( $F = 0$ ) positiva d'una superfície orientada  $S$ , amb  $U$  un obert del pla difeomorf al disc unitat. Sigui  $D \subset \varphi(U)$  una regió simple i  $\alpha : I \rightarrow \partial D$  una parametrització que recorre  $\partial D$  en sentit positiu. Suposem que la vora té vèrtexs en  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$  i que el paràmetre és l'arc en els trams regulars.

**6.3.1 Teorema local de Gauss-Bonnet.** *Amb les notacions anteriors, si  $\theta_i$  és l'angle exterior de  $\alpha$  en  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , se satisfà*

$$\sum_{i=1}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds + \int_D K dA + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi.$$

*Demostració.* Per la proposició 6.2.1, es té

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}(v'G_u - u'E_v) + \theta'(s),$$

i integrant respecte del paràmetre arc  $s$  entre 0 i  $\ell$ , trobem

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell \kappa_g(s) ds &= \sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} \kappa_g(s) ds \\
&= \int_0^\ell \left\{ \frac{1}{2\sqrt{EG}} (v'G_u - u'E_v) \right\} ds + \sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} \theta'(s) ds \\
&= \frac{1}{2} \int_D \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right) \right\} dudv + \sum_{i=1}^k (\theta(s_i) - \theta(s_{i-1})) \\
&= - \int_D K \sqrt{EG} dudv + 2\pi - \sum_{i=1}^k \theta_i \\
&= - \int_D K dA + 2\pi - \sum_{i=1}^k \theta_i
\end{aligned}$$

on, en la penúltima igualtat hem usat el teorema de Green-Riemann i, en la darrera, el teorema de l'índex de Hopf. ■

Observem que hem enunciat el teorema per a petites regions  $D$  contingudes en un entorn coordinat  $D \subset \varphi(U)$  adequat. En el proper apartat veurem que aquesta precaució és supèrflua i que el teorema és cert per a regions simples de  $S$  no necessàriament contingudes en un entorn coordinat.

## 6.4 El teorema de Gauss-Bonnet

Recordem que una triangulació d'una superfície compacta  $S$  és una família finita de triangles  $\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  que satisfà:

- (1)  $S = \cup_{i=1}^n \Delta_i$ ,
- (2) si la intersecció de dues cares no és buida, aleshores és o bé una aresta comuna o bé un o dos vèrtexs comuns a ambdues cares.

Podem estendre aquesta definició a una regió regular compacta  $R \subset S$  d'una superfície  $S$  demanant aleshores les dues condicions suplementàries següents:

- (3) si la intersecció d'una cara amb  $\partial R$  no és buida, aleshores consisteix de vèrtexs o una aresta completa,

- (4) tot vèrtex (en el sentit de corba diferenciable a trossos) de la frontera  $\partial R$  és un vèrtex de com a mínim un triangle de la triangulació.

Donada una triangulació d'una regió regular  $R$ , es defineix la *característica d'Euler de  $R$*  per

$$\chi(R) = c - a + v,$$

on  $c$  és el nombre de cares (triangles),  $a$  és el nombre d'arestes i  $v$  és el nombre de vèrtexs. Dels cursos de Topologia sabem que  $\chi(R)$  és un invariant topològic.

**6.4.1 Teorema de Gauss-Bonnet.** *Sigui  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superfície compacta. Aleshores,*

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S).$$

*Demostració.* Sabem que una superfície compacta admet una triangulació finita,  $\{\Delta_i\}$ ,  $1 \leq i \leq c$ . Per un procés de subdivisió baricèntrica, (que no detallarem), podem suposar que cadascun dels triangles de la triangulació està contingut en una parametrització regular ortogonal. Acceptarem, a més, que podem suposar que les arestes dels triangles  $\Delta_i$  són corbes diferenciables.

Si denotem per  $\theta_{ij}$  els angles exteriors del triangle  $\Delta_i$ ,  $j = 1, 2, 3$  i per  $\phi_{ij} = \pi - \theta_{ij}$  els angles interiors, el teorema local de Gauss-Bonnet pel triangle  $\Delta_i$  s'escriu

$$\sum_{j=1}^3 \int_{s_{j-1}}^{s_j} \kappa_g(s) ds + \int_{\Delta_i} K dA + \sum_{j=1}^3 (\pi - \phi_{ij}) = 2\pi.$$

Com hi ha un nombre finit de triangles, podem sumar aquestes igualtats fent variar  $i$ ,

$$\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^3 \int_{s_{j-1}}^{s_j} \kappa_g(s) ds + \sum_{i=1}^c \int_{\Delta_i} K dA + \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^3 (\pi - \phi_{ij}) = 2\pi c.$$

Analitzem separadament cadascuna de les sumes que apareixen al costat esquerra de la igualtat:

$$\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^3 \int_{s_{j-1}}^{s_j} \kappa_g(s) ds = 0,$$

ja que cada aresta ho és exactament de dos triangles i apareix en aquesta suma amb orientacions oposades. Quant a la integral de  $K$ ,

$$\sum_{i=1}^c \int_{\Delta_i} K dA = \int_S K dA.$$

Finalment, sigui  $c$  el nombre de cares de la triangulació,  $a$  el d'arestes i  $v$  el de vèrtexs. Aleshores,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^3 (\pi - \phi_{ij}) &= 3\pi c - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 (\phi_{ij}) \\ &= 3\pi c - 2\pi v \\ &= 2\pi a - 2\pi v, \end{aligned}$$

on, en la darrera igualtat hem utilitzat que  $3c = 2a$ . Així, trobem

$$\int_S K dA + 2\pi(c - v) = 2\pi a$$

d'on se segueix el resultat, ja que  $\chi(S) = a - c + v$ . ■

Hem establert el teorema sumant la contribució de tots els triangles de la superfície. Si considerem una triangulació d'una regió regular  $R$  de  $S$  i efectuem la mateixa suma que en la demostració anterior, els termes corresponents a la vora  $\partial R$  no es cancel·laran, i, per tant, obtindrem la següent generalització del teorema de Gauss-Bonnet.

**6.4.2 Teorema de Gauss-Bonnet per a regions regulars.** *Segui  $R \subset S$  una regió regular triangulada de  $S$ . Aleshores,*

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int_R K dA + \sum \theta_i = 2\pi\chi(R),$$

on la suma s'estén a tots els angles exteriors de les corbes de  $\partial R$ . ■

En particular, si les corbes de  $\partial R$  són regulars trobem

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int_R K dA = 2\pi\chi(R).$$

**6.4.3 Observació.** La prova de la darrera versió del teorema de Gauss-Bonnet estableix, en particular, que la fórmula establerta en el teorema local 6.3.1 és vàlida per a regions simples no necessàriament incloses en una parametrització regular.

Si  $D$  és una regió simple amb vora diferenciable a trossos i els arcs diferenciables de la paratmetrització  $\alpha$  de la vora són geodèsics, aleshores  $\kappa_g = 0$  i el teorema es redueix a

$$\int_D K dA + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi.$$

Així, si  $\Delta$  és un triangle geodèsic i  $\alpha_i = \pi - \theta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , són els angles *interiors* del triangle, es té:



**6.4.4 Fórmula de l'excés.** *Sigui  $\Delta \subset S$  un triangle geodèsic d'angles interiors  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Aleshores,*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi = \int_{\Delta} K \, dudv. \quad \blacksquare$$

Així, si la curvatura és zero, retrobem la coneguda fórmula de la geometria euclidiana  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ , mentre que per a superfícies amb curvatura positiva la suma dels angles d'un triangle geodèsic és superior a  $\pi$ , i per les de curvatura negativa, aquesta suma és inferior a  $\pi$ .

El teorema de Gauss-Bonnet estableix una relació profunda entre la geometria (determinada per la curvatura  $K$ ) i la topologia (determinada per la característica d'Euler  $\chi$ ) d'una superfície compacta  $S$ . Com a mostra de les implicacions d'aquesta relació, presentem tot seguit algunes aplicacions.

**6.4.5 Aplicacions.** (1) Sigui  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superfície compacta amb  $K \geq 0$ . Aleshores,  $S$  és homeomorfa a l'esfera  $\mathbb{S}^2$ .

En efecte, atès que  $S$  és compacta, hi ha algun punt  $p \in S$  amb  $K(p) > 0$  i, per continuïtat, la curvatura es mantindrà positiva en un entorn de  $p$ . Així, la hipòtesis implica que

$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \int_S K \, dA > 0.$$

Així, el resultat se segueix de que  $\mathbb{S}^2$  és l'única superfície compacta amb característica positiva.

(2) Siguin  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superfície amb  $K \leq 0$ ,  $p \in S$ , i  $\gamma_1, \gamma_2$  dues geodèsiques de  $S$  que parteixen de  $p$ . Si  $\gamma_1, \gamma_2$  es tallen en un altre punt  $q \in S$ , aleshores la corba  $\gamma_2^{-1}\gamma_1$  no envolta una regió simple de  $S$ .

En efecte, siguin  $\theta_1, \theta_2$  els angles exteriors amb que es tallen  $\gamma_1, \gamma_2$  en  $p$  i  $q$ . Si aquestes corbes envoltessin una regió simple, podríem aplicar el teorema de Gauss-Bonnet i deduir

$$\int_D K \, dA + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi.$$

Ara bé, aquestes geodèsiques no són tangents ni en  $p$  ni en  $q$  (ja que en cas contrari coincidirien), per la qual cosa  $\theta_1, \theta_2 < \pi$ , el què, afegit a  $K \leq 0$ , fa que el terme de l'esquerra de la fórmula anterior sigui  $< 2\pi$ , resultant-ne una contradicció.

(3) Sigui  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superfície amb  $K \leq 0$ , aleshores no existeixen geodèsiques tancades que envoltin una regió simple.

Recordem que es diu que una superfície  $S$  és simplement connexa si tota corba tancada simple de  $S$  la divideix en dos components connexos, un dels quals és homeomorf a un disc. Com aplicació dels punts (2) i (3) anteriors i dels resultats sobre les geodèsiques provats en el capítol anterior, es té:

**6.4.6 Corol·lari.** *Sigui  $S$  una superfície simplement connexa de curvatura  $K \leq 0$ . Aleshores,*

- (1)  *$S$  no conté geodèsiques tancades.*
- (2) *Tot arc d'una geodèsica de  $S$  és minimal.*
- (3) *Si  $S$  és completa, dos punts qualssevol poden unir-se per una única geodèsica minimal.* ■

**6.4.7** Observem que de la fórmula de l'excés se'n deriva una demostració del teorema egregi de Gauss, (demostració que per a Gauss hauria estat la primera evidència del teorema). El raonament seria aproximadament el següent: sigui  $f : S \rightarrow S'$  una isometria local en  $p$ . Sabem que  $f$  conserva els angles, les àrees i les geodèsiques en un entorn de  $p$ . Així, si  $\Delta$  és un petit triangle geodèsic al voltant de  $p \in S$  amb angles interiors  $\alpha, \beta, \gamma$ , aleshores  $\Delta' = f(\Delta)$  és un triangle geodèsic al voltant de  $q = f(p)$  de la mateixa àrea i amb els mateixos angles interiors. Aleshores, pel teorema del valor mitjà del càlcul integral i la fórmula de l'excés, es té

$$\begin{aligned} K_S(p) &= \lim_{\Delta \rightarrow p} \frac{\int_{\Delta} K dA}{A(\Delta)} = \lim_{\Delta \rightarrow p} \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{A(\Delta)} \\ &= \lim_{\Delta' \rightarrow q} \frac{\alpha' + \beta' + \gamma' - \pi}{A(\Delta')} = \lim_{\Delta' \rightarrow q} \frac{\int_{\Delta'} K dA}{A(\Delta')} = K_{S'}(q). \end{aligned}$$

## 6.5 L'índex d'un camp vectorial amb singularitats aïllades

**6.5.1 Definició.** Sigui  $w$  un camp vectorial sobre la superfície  $S$ . Direm que un punt  $p \in S$  és *singular* per a  $w$  si  $w(p) = 0$ . En cas contrari, direm que  $p$  és *regular* per a  $w$ .

Sigui  $p \in S$  un punt singular per al camp  $w$  i suposem que està aïllat, és a dir, que té un entorn  $U$  a  $S$  en el qual no hi ha altres punts singulars. Considerem una parametrització regular  $\varphi : D_r(0) \rightarrow U$ , on  $D_r(0)$  és el disc de radi  $r$  centrat a 0, i sigui  $R \subset \varphi(D)$  una regió simple que conté  $p$  al seu interior. Denotem per  $\alpha$  la corba positivament orientada que recorre  $\partial R$  i  $\theta(s)$  una determinació de l'angle entre  $\varphi_u$  i  $w$  al llarg de  $\alpha(s)$ .

**6.5.2 Definició.** Amb les notacions anteriors, es defineix *l'índex de  $w$  en  $p$*  com l'enter

$$\text{ind}_p(w) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)) \in \mathbb{Z}.$$

**6.5.3 Teorema de l'índex de Poincaré-Hopf.** *Sigui  $w$  un camp vectorial sobre una superfície compacta orientable  $S$  tal que tots els seus punts singulars són aïllats. Aleshores,*

$$\sum_{p \in S} \text{ind}_p(S) = \chi(S).$$

En particular,

**6.5.4 Corol·lari.** *Sigui  $S$  una superfície compacta i orientable amb  $\chi(S) \neq 0$ . Aleshores, tot camp vectorial té almenys un punt singular.* ■

El cas de l'esfera es coneix com a teorema de l'esfera peluda:

**6.5.5 Corol·lari (teorema de l'esfera peluda).** *Tot camp vectorial sobre l'esfera  $\mathbb{S}^2$  té almenys un punt singular.* ■

Aquests corol·laris mostren una característica fonamental del teorema de l'índex: dona una relació sorprenent entre propietats locals (l'índex del camp vectorial en un punt) i propietats globals (la característica d'Euler). Així, donat un camp sobre una esfera, si el regularitzem a l'entorn d'un punt, estarem produint una singularitat en algun altre lloc de la superfície.

La demostració del teorema de l'índex que presentem segueix un esquema similar a la demostració del teorema de Gauss-Bonnet: en primer lloc establim una fórmula local per al càlcul de l'índex, en la qual intervindrà la curvatura de la superfície, i després sumarem l'aportació de tots els punts singulars considerant una triangulació adequada de  $S$ , obtenint, com aplicació del teorema de Gauss-Bonnet, la característica d'Euler de  $S$ .

*Fórmula local per al càlcul de l'índex:* anem a establir una fórmula anàloga a l'obtinguda per a la curvatura geodèsica en la Proposició 6.2.1. Comencem fixant les condicions: sigui  $w$  un camp vectorial sobre  $S$  i  $p \in S$  un punt singular aïllat (o regular). Considerem una parametrització regular ortogonal al voltant de  $p$ ,  $\varphi : U \rightarrow S$  i  $R \subset \varphi(U)$  una regió simple que conté  $p$  al seu interior i no conté altres punts singulars de  $w$ .

Parametritzem per l'arc la vora de la regió  $R$ ,  $\sigma : [a, b] \rightarrow \partial R$  i suposem que aquesta parametrització orienta positivament la vora (respecte de la parametrització  $\varphi$ ). Finalment, sigui  $\bar{w}$  un camp vectorial paral·lel al llarg de  $\sigma$  i  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una determinació de l'angle entre  $w\sigma$  i  $\bar{w}$ .

**6.5.6 Proposició.** *Amb les notacions anteriors, se satisfà*

$$\text{ind}_p(w) = \frac{1}{2\pi} \int_R K dA - \frac{1}{2\pi} (\phi(b) - \phi(a)).$$

*Demostració.* Per definició, l'índex es calcula a partir de la determinació de l'angle entre  $w$  i  $\varphi_u$ . Sigui  $\theta$  una determinació d'aquest angle i  $\psi$  una determinació de l'angle entre  $\varphi_u$  i  $\bar{w}$ . Aleshores,

$$\phi = \psi - \theta,$$

i, per tant,

$$\text{ind}_p(w) = \frac{1}{2\pi} (\theta(b) - \theta(a)) = \frac{1}{2\pi} (\psi(b) - \psi(a)) - \frac{1}{2\pi} (\phi(b) - \phi(a)),$$

per la qual cosa serà suficient establir el següent

**6.5.7 Lema.**  $\psi'(s) = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}(v'G_u - u'E_v),$

ja que d'aquesta fórmula deduem

$$\psi(b) - \psi(a) = \int_a^b \psi'(s) ds = - \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{EG}}(v'G_u - u'E_v) ds = \int_R K dA,$$

on la darrera igualtat se segueix del teorema de Green-Riemann, anàlogament al càlcul efectuat en la demostració del teorema de Gauss-Bonnet local.

Demostrem ara la fórmula que estableix el lema 6.5.7: situem-nos amb les notacions de la demostració de la Proposició 6.2.1, és a dir, denotem per  $e_1, e_2$  els camps unitaris en les direccions coordenades. Segons l'expressió (†) d'aquella demostració, es té

$$\left\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{EG}}(v'G_u - u'E_v),$$

i, per tant, basta veure que

$$\psi'(s) + \left\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \right\rangle = 0.$$

Atès que  $\bar{w}$  és un camp paral·lel al llarg de  $\sigma$  i que, segons hem vist a loc. cit.,

$$\frac{De_1}{dt} = \left\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \right\rangle e_2, \quad \frac{De_2}{dt} = - \left\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \right\rangle e_1,$$

si escrivim  $\bar{w}/|\bar{w}| = \cos \psi e_1 + \sin \psi e_2$ , trobem

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D(\bar{w}/|\bar{w}|)}{dt} = -\psi'(s) \sin \psi e_1 + \cos \psi \frac{De_1}{dt} + \psi'(s) \cos \psi e_2 + \sin \psi \frac{De_2}{dt} \\ &= \left( \psi'(s) + \left\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \right\rangle \right) [-\sin \psi e_1 + \cos \psi e_2], \end{aligned}$$

el que acaba la prova. ■

*Demostració del teorema de l'índex de Poincaré-Hopf 6.5.3:* En primer lloc observem que  $w$  té un nombre finit de singularitats, ja que en cas contrari, per la compacitat de  $S$ , el conjunt de punts singulars tindria un punt d'acumulació, que seria un punt singular no aïllat.

Considerem una família de parametritzacions ortogonals que cobreixin  $S$  i una triangulació  $\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  tal que

- (i) tot triangle  $\Delta_i$  de la triangulació està contingut en algun sistema coordinat,
- (ii) cada triangle conté, com a màxim, un punt singular del camp  $w$ , que està al seu interior,

i orientem positivament les vores d'aquests triangles.

Fem ara les eleccions següents:

$w_i$  un camp vectorial paral·lel al llarg de la vora del triangle  $\Delta_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,

$\phi_i$  una funció de determinació de l'angle entre els camps  $w$  i  $w_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Si  $\ell_{ij}$  és l'aresta del triangle  $\Delta_i$  de vèrtexs  $v_0, v_1$ , escriurem

$$\phi_{ij} = \phi_i(v_1) - \phi_i(v_0).$$

Amb tots aquests preliminars, la fórmula del Lema 6.5.7 al llarg de l'aresta  $\ell_{ij}$  dona

$$\phi_{ij} = - \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{2\sqrt{EG}} (v'G_u - u'E_v) ds - [\theta(v_1) - \theta(v_0)],$$

on  $\theta$  és l'angle entre  $w$  i  $\varphi_u$ . En particular, veiem que  $\phi_{ij}$  no depèn de la determinació  $\phi_i$  de l'angle escollida, així com tampoc del camp vectorial  $w_i$ .

Per la Proposició 6.5.6 aplicada a cadascun dels triangles, trobem

$$\int_{\Delta_i} K dA - \sum_{j=1}^3 \phi_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } \Delta_i \text{ no conté punts singulars,} \\ 2\pi \text{ind}_p(w), & \text{si } \Delta_i \text{ conté el punt singular } p. \end{cases}$$

Sumant les expressions anteriors sobre tots els triangles de la triangulació resulta

$$\int_{\Delta_i} K dA - 2\pi \sum_p \text{ind}_p(w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 \phi_{ij} = 0,$$

ja que cada aresta apareix dues vegades i amb sentits oposats. ■

**6.5.8** Tot i que hem usat la curvatura de Gauss de la superfície en la demostració del teorema de l'índex de Poincaré-Hopf, aquesta no intervé en l'enunciat del teorema, com tampoc la primera forma fonamental. Sembla natural preguntar-se si es pot donar una altra demostració, independent del teorema de Gauss-Bonnet. La resposta és afirmativa i, com passa sovint amb teoremes importants, hi ha de fet diverses demostracions d'aquest resultat. El lector interessat pot consultar, per exemple, la que apareix al llibre "Topology from the differentiable viewpoint" de J. Milnor, o la suggerent demostració proposada per W. Thurston a "Three-dimensional Geometry and Topology", Proposition 1.3.10.

# Curvatura constant

En aquest capítol estudiarem les superfícies completes de curvatura de Gauss constant. De fet, l'estudi complet d'aquestes superfícies està fora de l'abast d'un curs d'un quadrimestre, per la qual cosa ens reduïrem essencialment a enunciar i emmarcar els resultats principals, demostrant dos teoremes que són interessants per ells mateixos, (el recíproc del teorema egregi de Gauss per a superfícies de curvatura constant, teorema 7.2.1, i la caracterització de les esferes, teorema 7.4.1), i introduïrem i estudiarem un exemple singular, el pla hiperbòlic.

Les superfícies completes de curvatura constant donen models de les geometries axiomàtiques que es deriven dels *Elements* d'Euclides. És per això que dediquem la primera secció a una (molt) breu discussió de l'axioma de les paral·leles.

## 7.1 Introducció: geometries no euclidianes

En aquesta secció farem una incursió succincta en les geometries no euclidianes i el paper de les superfícies diferencials com a models d'aquestes, reduint-nos al cas del pla. El lector interessat farà bé de consultar el llibre d'Agustí Reventós [R], o, des d'una perspectiva més propera a la d'aquest curs, el de MacCleary, [Mc], citats a la bibliografia.

Hi ha dues formes d'analitzar la geometria del pla. La primera, la *sintètica*, parteix d'un conjunt d'axiomes i nocions comuns, obtenint els resultats de la geometria per deducció lògica a partir d'aquests axiomes. Aquesta és la via desenvolupada per Euclides als seus *Elements*. La segona via és l'*analítica* i consisteix en identificar el pla amb  $\mathbb{R}^2$ , és a dir, identificar el pla amb parells de nombres reals, assignant equacions als diferents objectes geomètrics, a partir de les quals es poden demostrar les seves propietats. Observeu que aquesta segona via suposa també l'establiment d'uns axiomes previs, però que en aquest cas han estat desplaçats fora de la geometria, els corresponents al cos real  $\mathbb{R}$  i a la teoria

de conjunts.

La geometria dels *Elements* d'Euclides és sintètica i va representar un model de rigor i coneixement fonamental fins a les primeries del segle XIX. Euclides parteix d'unes definicions bàsiques, unes nocions comunes i uns postulats fonamentals a partir dels quals dedueix les propietats geomètriques del pla. A tall d'exemple reproduïm les definicions i postulats següents, que afecten a la geometria del pla:

**7.1.1 Definicions dels Elements d'Euclides.** (1) Un punt és allò que no té parts.

(2) Una línia és una longitud sense amplada.

(3) Els extrems d'una línia són punts.

(4) Una recta és una línia que jeu per igual respecte de tots els seus punts.

Les definicions són imprecises i usen termes no definits, com ara longitud o amplada, la qual cosa va comportar assumir algunes propietats geomètriques com evidents sense deduir-se formalment dels axiomes. De fet, les definicions donades s'aplicarien igualment a les circumferències, per exemple. Es va trigar força temps a adonar-se que l'important no és la natura dels objectes de la geometria, sino la relació que s'estableix entre aquests objectes. És a dir, no cal definir què és un punt o una recta, sinó fixar quines propietats tenen els uns respecte de les altres.

**7.1.2 Postulats dels Elements d'Euclides.** (1) Per dos punts diferents passa una única recta.

(2) Un segment rectilini sempre es pot perllongar.

(3) Hi ha una única circumferència amb centre i radi donats.

(4) Tots els angles rectes són iguals.

(5) Si una secant talla dues rectes formant a un costat angles interiors que sumen menys de dos rectes, les rectes suficientment perllongades es tallen en aquest mateix costat.

Els axiomes o postulats dels *Elements* no són complets. De fet Euclides en els seus raonaments usa, sense ser-ne conscient, algunes propietats geomètriques que no es dedueixen dels postulats enunciats. Així, per exemple, Euclides utilitza com a fet evident que dues circumferències tals que cadascuna d'elles passa pel centre de l'altra, es tallen necessàriament, cosa que no es dedueix dels axiomes establerts.



La perspectiva històrica va assenyalar diverses deficiències en el sistema de postulats, com la manca del postulat de continuïtat de Dedekind, o la seva conseqüència, el caràcter arquimedià de la recta real, o la manca d'axiomes d'ordre, aquells que permeten dir que un punt d'una recta està *entre* dos punts donats, aquest darrer remarcant per Pasch al segle XIX. D. Hilbert va donar una versió axiomàtica definitiva de la geometria del pla al tombant del segle XX, clarificant i completant els axiomes dels *Elements*, (vegeu el llibre de Reventós per a un desenvolupament axiomàtic de la geometria plana).

Des del primer moment, els postulats (1)-(4) van semblar molt naturals, mentre que el 5è tenia una caire ben diferent. En efecte, aquest postulat té diverses formes equivalents, d'entre les quals destaquen:

(5') Per tot punt exterior a una recta passa una única paral·lela.

(5'') La suma dels angles interiors d'un triangle és  $\pi$ .

Observem que en la forma (5') el postulat fa referència a un fet que succeeix a l'infinit: l'existència d'una recta que, per més que l'allarguem, no talla la recta donada. Aquest fet no és evident; pensem per exemple en una asímptota d'una hipèrbola: conforme tendim a l'infinit s'apropa més i més a la hipèrbola i podríem sospitar que la talla en algun punt, cosa que no succeeix al pla euclidià. El propi Euclides sembla que era conscient de que es tractava d'un postulat especial ja que el va evitar en molts raonaments, fins i tot al preu de fer proves molt més llargues d'alguns dels resultats presentats.

D'altra banda, en la forma (5) sembla un postulat força natural i és per això que durant molt de temps es va pensar que el 5è postulat havia de deduir-se dels altres quatre. Degut a (5') es coneix el 5è postulat com l'*axioma o postulat de les paral·leles*.

La història dels diversos intents de demostrar-lo a partir dels primers quatre postulats i la conseqüent descoberta de la geometria no euclidiana (la qual no compleix el 5è postulat) per part de J. Bolyai, C. Gauss i N. Lovatchevsky, és molt interessant, però ens duria molt lluny dels objectius d'aquest curs.

Quan es disposa d'un sistema axiomàtic sorgeixen de forma natural diverses preguntes. Citem-ne, sense pretendre ser molt precisos, dues de fonamentals:

- és consistent? És a dir, els axiomes admesos poden dur a teoremes contradictoris?
- és complet? És a dir, hi ha teoremes indesmostrables a partir del sistema d'axiomes?

A banda d'intentar respondre aquestes preguntes des de la pròpia teoria, una manera de comprovar la consistència d'un sistema axiomàtic es disposar de models que el compleixin. Així, per exemple, l'espai euclidià  $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$  és un model de la geometria euclidiana plana.

La geometria diferencial de les superfícies proveeix models de les geometries euclidianes i no euclidianes. En aquestes superfícies, les rectes del pla seran substituïdes per les geodèsiques. La geometria del pla té dues propietats que haurem d'imposar a una superfície per tal que en resulti un model acceptable de les geometries no euclidianes:

- *Competesa*: dos punts qualssevol han de determinar una recta, és a dir, en el context de la geometria diferencial dos punts qualssevol han de determinar una geodèsica. És per això que demanarem que la superfície sigui *completa*; recordem que el teorema de Hopf-Rinow assegura aleshores l'existència d'una geodèsica minimal entre dos punts, no necessàriament única.
- *Homogeneïtat*: la geometria al voltant de dos punts qualssevol  $p, q$  de la superfície ha de ser la mateixa. És a dir, s'ha de satisfer la següent propietat d'homogeneïtat:

$$\forall p, q \in S, \quad \exists \text{ entorns } U, V \subset S \quad \text{tals que} \quad \exists \text{ isometria } U \cong V.$$

Pel teorema egregi de Gauss, la curvatura de la superfície serà la mateixa en tots els punts, és a dir, en un model geomètric la curvatura serà constant. De fet n'hi ha prou de demanar la constància de  $K$  per obtenir l'homogeneïtat desitjada, com resultarà del teorema de Minding que demostrarem en la propera secció.

En definitiva, els models de les geometries euclidianes i no euclidianes que pot proporcionar la geometria de les superfícies els hem de buscar entre les superfícies completes de curvatura constant, que són les superfícies objecte d'aquest capítol.

## 7.2 Un recíproc del teorema egregi

El teorema egregi de Gauss estableix que en punts corresponents per una isometria local les curvatures són iguals. En el cas de les superfícies de curvatura constant es té el recíproc que enunciem a continuació, conegut com a Teorema de Minding.

**7.2.1 Teorema.** *Siguin  $S, S' \subset \mathbb{R}^3$  superfícies regulars de curvatures constants  $K, K'$ , respectivament, i  $p \in S, q \in S'$  dos punts qualssevol. Si  $K = K'$ , aleshores, existeix una isometria local d'un entorn de  $p$  en un entorn de  $q$  que transforma  $p$  en  $q$ .*

*Demostració.* Definirem la isometria mitjançant l'aplicació exponencial. Per a fer-ho, escollim  $\delta > 0$  tal que l'exponencial de  $S$  en  $p$  i l'exponencial de  $S'$  en  $q$  estiguin definides en el disc de radi  $\delta$ , establint sengles difeomorfismes

$$\exp_p : B_\delta(0) \subset T_p S \longrightarrow B_\delta(p) \subset S, \quad \exp_q : B_\delta(0) \subset T_q S' \longrightarrow B_\delta(q) \subset S',$$

que defineixen entorns normals dels punts  $p, q$ .

Sigui  $g : T_p S \longrightarrow T_q S'$  una isometria, és a dir, escollim bases ortonormals en cadascun d'aquests plans i considerem l'aplicació lineal que transforma la base de  $T_p S$  en la base de  $T_q S'$ . Aleshores definim  $f = \exp_q \circ g \circ \exp_p^{-1}$ , que és l'aplicació que completa el diagrama següent

$$\begin{array}{ccc} T_p S & \xrightarrow{g} & T_q S' \\ \exp_p \downarrow & & \downarrow \exp_q \\ B_\delta(p) \subset S & \xrightarrow{\quad f \quad} & B_\delta(q) \subset S' \end{array}$$

Si veiem que  $f$  és una isometria, haurem acabat la prova. Si en els entorns normals  $B_\delta(p), B_\delta(q)$  considerem coordenades polars geodèsiques, per 5.3.9 bastarà veure que

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'.$$

Les dues primeres igualtats són certes ja que  $E = E' = 1$  i  $F = F' = 0$ , pel lema de Gauss, 5.3.9. Quant a  $G$ , de la fórmula de Gauss se segueix que

$$G = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{G_r}{\sqrt{G}} \right)_r = -\frac{1}{2G} \frac{2G_{rr}G - G_r G_r}{2\sqrt{G}} = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}},$$

i, anàlogament per a  $G'$ . Com  $K = K'$ , les dues funcions  $\sqrt{G}, \sqrt{G'}$  satisfan l'equació diferencial

$$x_{rr} + Kx = 0,$$

amb condicions inicials

$$\lim_{r \rightarrow 0} x = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} x_r = 1,$$

d'on, aplicant el teorema d'unicitat resultarà la igualtat que busquem. Concretament aquest punt analitzant els diferents casos segons que les curvatures siguin positives, negatives o zero: partim de l'equació

$$(\sqrt{G})_{rr} + K\sqrt{G} = 0,$$

amb  $K$  constant.

$K = 0$  Integrant respecte de  $r$  trobem  $(\sqrt{G})_r = h(\theta)$ , on  $h$  és una funció arbitrària. Ara bé, com  $\lim_r (\sqrt{G})_r = 1$ , resulta que  $h$  ha de ser constant igual a 1,  $(\sqrt{G})_r = 1$ . Integrant de nou,  $\sqrt{G} = r + k(\theta)$ , però la condició  $\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$  imposa que  $k(\theta) = 0$ . En resum,  $G = r^2$  està unívocament determinada.

$K > 0$  Integrant l'equació diferencial trobem

$$\sqrt{G} = a(\theta) \cos(\sqrt{K}r) + b(\theta) \sin(\sqrt{K}r),$$

i si imposem les condicions inicials, trobem que  $a(\theta) = 0, b(\theta) = 1/\sqrt{K}$ , amb la qual cosa l'única solució és

$$\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}r \implies G = \frac{1}{K} \sin^2 \sqrt{K}r.$$

$K < 0$  Aquest cas és similar a l'anterior: integrant l'equació obtenim

$$\sqrt{G} = a(\theta) \cosh(\sqrt{-K}r) + b(\theta) \sinh(\sqrt{-K}r),$$

i imposant les condicions inicials, trobem que  $a(\theta) = 0, b(\theta) = 1/\sqrt{-K}$ , és a dir,

$$\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh \sqrt{-K}r \implies G = -\frac{1}{K} \sinh^2 \sqrt{-K}r.$$

En definitiva, hi ha una única solució en cada cas i, per tant,  $G = G'$ . ■

### 7.3 Superfícies de revolució de curvatura constant

Abans d'establir els teoremes generals d'aquest capítol sobre superfícies de curvatura constant, anem a analitzar l'exemple de les superfícies de revolució. Lògicament, l'estructura local ve determinada pel teorema de Minding establert en la secció anterior, la pregunta és ara: què podem dir globalment de les superfícies de revolució de curvatura constant?

Començarem fixant les notacions: considerem una corba plana, parametritzada per l'arc,

$$\alpha(s) = (r(s), z(s)), \quad s_0 < s < s_1,$$

amb  $r(s) > 0$  i la superfície de revolució associada

$$S = \{(r(s) \cos \theta, r(s) \sin \theta, z(s)) \mid s_0 < s < s_1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

La pregunta és: per a quines funcions  $r(s), z(s)$  aquesta superfície de revolució té curvatura constant?

Com hem vist al capítol 4, en aquestes condicions la curvatura de  $S$  ve donada per

$$K = -\frac{r''}{r}.$$

Així, com hem suposat la corba parametritzada per l'arc, les funcions  $r(s)$  i  $z(s)$  satisfan

$$\begin{aligned} r''(s) + Kr(s) &= 0, \\ z'(s) = \pm \sqrt{1 - (r'(s))^2} &\implies z(s) = \pm \int_0^s \sqrt{1 - (r'(t))^2} dt + C. \end{aligned}$$

La constant d'integració  $C$  correspon a una translació de la superfície paral·lela a l'eix  $OZ$ , per la qual cosa podem suposar que és zero.

Suposem ara que la curvatura  $K$  és constant. L'anàlisi dels diferents casos segons el signe de la curvatura és ara paral·lel a l'efectuat en la secció anterior:

$K = a^2 > 0, a > 0$  Integrant l'equació diferencial trobem la solució general

$$r(s) = C_1 \cos(as) + C_2 \sin(as) = A \cos(as + b),$$

per a certes constants  $A, b$ . Escollint adequadament el punt des d'on comencem a mesurar el paràmetre arc podem suposar que  $b = 0$ ,  $r(s) = A \cos(as)$ .

Atès que la funció  $r(s)$  és positiva, la constant  $A$  també ho serà,  $A > 0$ , i la variació del paràmetre  $s$  estarà delimitada per  $|s| < \pi/2a$ . Trobem així una família de solucions corresponents a superfícies de revolució de curvatura constant  $K = a^2$  parametritzades per la constant  $A > 0$ :

$$\boxed{\begin{aligned} r(s) &= A \cos(as), & |s| < \frac{\pi}{2a}, \\ z(s) &= \pm \int_0^s \sqrt{1 - a^2 A^2 \sin^2(at)} dt \end{aligned}}$$

Observem que si  $A = 1/a$ , aleshores  $z(s) = \pm(1/a) \sin(as)$  i, per tant,  $S$  és part d'una esfera de radi  $1/a$ , mentre que per  $A \neq 1/a$  la integral que defineix  $z(s)$  no pot calcular-se per mètodes elementals; de fet aquesta integral pot expressar-se en termes d'integrals el·líptiques.

Si  $A < 1/a$ , aleshores l'expressió subintegral de  $z(s)$  és real per a tots els valors de l'interval  $|s| < \pi/(2a)$  i en el límit en  $\pi/(2a)$  la superfície té contacte amb l'eix de gir. La superfície tendeix a ser punxaguda en l'eix de revolució.

Si  $A > 1/a$ , la integral de  $z(s)$  només estarà definida per a  $0 \leq s \leq \arcsin(1/a)$  i a l'extrem final d'aquest interval la derivada  $z'$  és 0, per la qual cosa el pla tangent a la superfície tendeix a ser perpendicular a l'eix de gir.

Pel teorema de Minding, totes aquestes superfícies són localment isomètriques. Observem, però, que les tres famílies no són (globalment) isomètriques entre elles. Per exemple, l'esfera és compacta i simplement connexa, mentre que la superfície corresponent a  $A > 1/a$  no és compacta ni simplement connexa.

$K = 0$  L'equació diferencial que satisfà  $r(s)$  esdevé  $r''(s) = 0$ , per la qual cosa les funcions  $r$  i  $z$  seran  $r(s) = as + b$ ,  $z(s) = \pm\sqrt{1-a^2}s + d$ . Si escrivim  $c = \sqrt{1-a^2}$ , trobem l'expressió

$$\begin{aligned} r(s) &= as + b, \\ z(s) &= cs + d, \end{aligned}$$

amb  $a^2 + c^2 = 1$ , com correspon al fet que el paràmetre és l'arc. Així, la corba  $\alpha(s) = (as + b, cs + d)$  és una recta. Segons els valors de les constants, s'obtenen les possibilitats següents:

$a = 0$ , aleshores  $S$  és part d'un cilindre circular.

$c = 0$ , aleshores  $S$  és part d'un pla.

$ac \neq 0$ , aleshores  $S$  és part d'un con circular.

$K = -a^2 < 0$ ,  $a > 0$  L'equació diferencial  $r'' - a^2r = 0$  té solució general

$$r(s) = C_1 \cosh(as) + C_2 \sinh(as) = D_1 e^{as} + D_2 e^{-as}.$$

Observem que els casos  $D_1 = 0$  i  $D_2 = 0$  són equivalents via un canvi  $s \mapsto -s$ , i que si  $D_1, D_2 \neq 0$ , podem suposar que  $D_2 = \pm D_1$  (que corresponen als casos  $C_1 = 0$  o  $C_2 = 0$ ), ja que un canvi  $s \rightarrow s + s_0$  multiplica les constants  $D_1, D_2$  per factors diferents i permet igualar els seus mòduls; en aquest cas escriurem  $D = |D_1| = |D_2|$ . Distingim aquests tres casos:

$D_2 = 0$ . En aquest cas la solució és

$$\begin{aligned} r(s) &= D e^{as}, \\ z(s) &= \pm \int_0^s \sqrt{1 - e^{2at}} dt \end{aligned}$$

La integral que defineix  $z(s)$  pot calcular-se per mètodes elementals (exercici!) i imposa la condició  $e^{2as} < 1$ . Per a  $a = 1$ , la corba resultant és la tractriu i la superfície de revolució corresponent és la pseudoesfera.

$D_1 = D_2 = D$ . Aleshores la superfície correspon a

$$\begin{aligned} r(s) &= 2D \cosh(as), \\ z(s) &= \pm \int_0^s \sqrt{1 - 4Da^2 \sinh(2a)} dt \end{aligned}$$

i la integral estarà definida per a  $|\sinh(as)| < 1/(2aD)$ , amb la qual cosa es tindrà  $2a < r(s) < \sqrt{1 + 4a^2 D^2}$ .

$D_2 = -D_1 = -D$ . Aleshores la superfície correspon a

$$\begin{aligned} r(s) &= 2D \sinh(as), \\ z(s) &= \pm \int_0^s \sqrt{1 - 4Da^2 \cosh(2a)} dt \end{aligned}$$

i la integral estarà definida per a  $0 < 2aD < 1$  i  $1 < \cosh(as) < 1/(2aD)$ . D'aquí deduïm que  $0 < s < (1/2aD)$  i  $0 < r(s) < \sqrt{1 - 4a^2 D^2}$ .

En aquests dos darrers casos les integrals que intervenen no són elementals, i s'expressen en funció de les integrals el·líptiques.

## 7.4 Superfícies de curvatura constant positiva

Segons els exemples analitzats en la secció anterior, entre les superfícies de revolució, l'esfera de radi  $R$  es caracteritza per tenir la curvatura constant igual a  $1/R^2$ . De fet, aquesta caracterització de l'esfera es dona entre totes les superfícies compactes de l'espai, com mostra el teorema següent, demostrat per primer cop per H.Liebmann.

**7.4.1 Teorema.** *Si  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superfície regular compacta i connexa, de curvatura constant  $K$ . Aleshores,  $S$  és una esfera.*

El resultat se seguirà dels dos lemes següents, en els quals no se suposa que la curvatura és constant:

**7.4.2 Lema.** *Tota superfície compacta de  $\mathbb{R}^3$  té al menys un punt el·líptic, és a dir,  $p \in S$  amb  $K(p) > 0$ .*

**7.4.3 Lema.** *Sigui  $S$  una superfície regular i  $p \in S$  tal que*

*(i)  $p$  és el·líptic,  $K(p) > 0$ ,*

*(ii)  $p$  és màxim local per la curvatura principal  $k_1$  i, alhora, mínim local per la curvatura principal  $k_2$ .*

*Aleshores,  $p$  és un punt umbilical, és a dir,  $k_1(p) = k_2(p)$ .*

*Demostració del teorema 7.4.1 a partir dels lemes 7.4.2, 7.4.3.* Atès que  $S$  és compacta, el lema 7.4.2 assegura l'existència d'un punt el·líptic, i com  $K$  és constant, en resulta  $K > 0$ .

Les funcions de curvatura principals  $k_1, k_2$  són funcions contínues sobre  $S$ ; així, per la compacitat de  $S$ , existeix un punt  $p \in S$  en el qual  $k_1$  atansa el seu valor màxim. Però, com el producte  $k_1 k_2 = K$  és constant, la segona curvatura principal  $k_2$  tindrà un mínim en  $p$ . Segons el lema 7.4.3,  $p$  és un punt umbilical.

Com les curvatures principals tenen un màxim i un mínim en  $p$  i coincideixen, han de coincidir en tots els punts, és a dir, tots els punts són umbilicals. Però, aleshores podem aplicar la proposició 3.4.9 per concloure que  $S$  és part d'un pla o d'una esfera  $S'$  i com  $K \neq 0$ , descartem el cas del pla. Finalment, concloem per connexió:  $S$  és un obert i tancat de  $S'$ , per tant,  $S = S'$ . ■

*Demostració del lema 7.4.2.* Atès que  $S$  és compacta, hi ha un punt  $p \in S$  tal que la distància a l'origen és màxima. Volem veure que  $p$  és un punt el·líptic.

Sigui  $R = |p|$  i  $S_R$  l'esfera de centre l'origen i radi  $R$ . Aleshores,  $p \in S \cap S_R$  i la bola tancada de radi  $R$  conté la superfície  $S$ . En particular,  $S$  i  $S_R$  són tangents en  $p$  i, per tant,  $p$  és ortogonal a  $T_p S$ .

Calculem ara les curvatures normals de les corbes de  $S$  per  $p$ : en un entorn de  $p$ , la superfície  $S$  és orientable; sigui  $N$  el camp normal amb  $N(p) = p/|p|$ . Si  $\alpha : I \rightarrow S$  és una corba amb  $\alpha(0) = p$ , aleshores la funció

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ s &\longmapsto |\alpha(s)|^2 \end{aligned}$$

té un màxim absolut en  $s = 0$ . Així, segons la definició de la curvatura normal

$$\kappa_n(\alpha'(0)) \leq -\frac{1}{|p|}.$$

Donat que la corba  $\alpha$  és arbitrària, se segueix que les curvatures normals tenen totes el mateix signe i, en particular, que el punt  $p$  és el·líptic. ■



*Demostració del lema 7.4.3.* Raonarem per reducció a l'absurd. Suposem doncs que  $p$  no és umbilical i sigui  $\varphi : U \rightarrow S$  una parametrització regular en un entorn de  $p$  tal que les corbes coordenades són línies de curvatura. Per l'elecció de  $\varphi$ ,  $F = 0 = f$  i les curvatures principals són  $e/E, g/G$ . Atès que  $p$  no és umbilical, podem suposar, intercanviant si cal  $u$  i  $v$ , que

$$k_1 = \frac{e}{E}, \quad k_2 = \frac{g}{G}.$$

Derivant aquests igualtats respecte de  $v$  i  $u$ , respectivament, trobem que

$$(Ek_1)_v = e_v, \quad (Gk_2)_u = g_u.$$

Les equacions de Codazzi-Mainardi per a  $\varphi$  s'escriuen

$$e_v = \frac{E_v}{2}(k_1 + k_2), \quad g_u = \frac{G_u}{2}(k_1 + k_2),$$

i, per tant, si hi substituïm les expressions de  $e_v, g_u$  obtingudes anteriorment, trobem que se satisfan les igualtats

$$E(k_1)_v = \frac{E_v}{2}(-k_1 + k_2), \quad G(k_2)_u = \frac{G_u}{2}(k_1 - k_2). \quad (\dagger)$$

D'altra banda, la fórmula de Gauss per a la curvatura, quan  $F = 0$ , és

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right),$$

d'on se segueix la igualtat

$$-2KEG = E_{vv} + G_{uu} + ME_v + NG_u,$$

per a certes funcions diferenciables de  $(u, v)$ ,  $M, N$ , que no ens caldrà especificar. Si en aquesta darrera expressió utilitzem les igualtats  $(\dagger)$ , trobem que se satisfà una igualtat del tipus

$$-2KEG = -\frac{2E}{k_1 - k_2}(k_1)_{vv} + \frac{2G}{k_1 - k_2}(k_2)_{uu} + \bar{M}(k_1)_v + \bar{N}(k_2)_u,$$

i, per tant,

$$-(k_1 - k_2)KEG = -E(k_1)_{vv} + G(k_2)_{uu} + \widetilde{M}(k_1)_v + \widetilde{N}(k_2)_u,$$

per a certes funcions diferenciables  $\widetilde{M}, \widetilde{N}$ . El membre de l'esquerra d'aquesta igualtat és estrictament negatiu en  $p$ , ja que  $K > 0$  i  $k_1 > k_2$ . D'altra banda, per la hipòtesis (ii),  $k_1$  té un màxim a  $p$  i  $k_2$  hi té un mínim, per la qual cosa les derivades primeres s'anul·len en  $p$  i  $(k_1)_{vv} \leq 0, (k_2)_{uu} \geq 0$ ; és a dir, el membre de la dreta de la igualtat és positiu o nul. Arribem així a una contradicció. ■

**7.4.4 Observació.** Els exemples de superfícies de revolució de curvatura constant positiva de la secció anterior mostren la necessitat de suposar alguna propietat suplementària a la constància de la curvatura per tal de caracteritzar l'esfera. En el Teorema 7.4.1 hem suposat que  $S$  és compacta, la qual cosa ha estat suficient. De fet, es pot demostrar que és suficient suposar que  $S$  és completa (recordem que *compacta*  $\implies$  *completa*), ja que una superfície de curvatura constant positiva i completa és necessàriament compacta. Per a més detalls vegeu el Teorema de Bonnet a [dC], capítol 5.

## 7.5 Superfícies de curvatura constant zero

Hem vist que les superfícies de revolució de curvatura zero són el pla, el cilindre circular i els cons (o una part d'elles). Dels tres exemples anteriors només el pla i el cilindre són superfícies completes, ja que els cons han d'evitar necessàriament el vèrtex. De fet, els casos del pla i del cilindre no són aïllats, ja que es té:

**7.5.1 Teorema (Hartman-Nirenberg).** *Sigui  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superfície regular connexa, completa i de curvatura  $K \equiv 0$ . Aleshores,  $S$  és un pla o un cilindre.* ■

No donarem la demostració completa d'aquest resultat (vegeu, per exemple, [AT], [dC]), sinó que ens limitarem a fer alguns comentaris per emmarcar les idees principals sense entrar en els detalls més tècnics.

*1a observació:* donat que  $K \equiv 0$ , tots els punts de la superfície seran plans o parabòlics,  $S = Pl(S) \cup Par(S)$ .

Si tots els punts són plans,  $S = Pl(S)$ , aleshores  $S$  és un pla, com es desprèn de 3.4.9. En general, el conjunt de punts plans  $Pl(S)$  és un tancat, ja que està definit per l'anul·lació de la curvatura mitjana  $H$ , i el conjunt de punts parabòlics és un obert  $Par(S) = S \setminus Pl(S)$ .

L'anàlisi de la frontera del conjunt de punts parabòlics, allà on es fa la transició dels punts parabòlics als punts plans, és força delicada. En lloc d'endinsar-nos en aquest punt, comentem un exemple clàssic i molt il·lustratiu de la possible relació entre els conjunts  $Pl(S)$  i  $Par(S)$ .

Considerem un triangle  $\Delta$  del pla  $XY$  al qual hem tret els vèrtexs i afegim-li sengles superfícies cilíndriques a cadascun dels costats amb generadors paral·lels als costats corresponents.

Enganxant amb cura els cilindres als costats del triangle, es pot aconseguir que en resulti una superfície regular  $S$ . Els conjunt de punts parabòlics  $Par(S)$  estarà format pels interiors dels cilindres, mentre que els punts plans seran els punts del triangle  $\Delta$  i els punts frontera de  $Par(S)$  són els tres costats de  $\Delta$ . Obtenim així una superfície regular amb  $K \equiv 0$  i que no és part d'un pla o d'un cilindre.

Certament, però, aquest exemple no està en contradicció amb el teorema de Hartman-Nirenberg, ja que la superfície no és completa. Una part de la prova del teorema, en la que no entrarem, consisteix en veure que la transició de punts parabòlics a punts plans que es dona en aquest exemple, no es pot donar per a superfícies completes.

*En el que resta, suposarem que tots els punts són parabòlics,  $S = Par(S)$ .*

*2a observació:* per tot punt  $p \in S$  passa una única recta  $\ell_p$  continguda en  $S$ .

En efecte, per  $p$  passa una única corba asimptòtica, ja que és un punt parabòlic; si veiem que és un segment rectilini, tota la recta corresponent estarà inclosa a  $S$  ja que la superfície és completa. Per veure que la corba asimptòtica per  $p$  és un segment, anem a comprovar que està en la intersecció de dos plans no paral·lels:

Considerem una parametrització regular  $\varphi$  en un entorn  $V$  de  $p$  i tal que les corbes coordenades siguin línies de curvatura. Una d'elles serà la corba asimptòtica, posem per cas  $v = v_0$ , amb la qual cosa  $N_u = 0$  al llarg d'aquesta corba, pel teorema de O. Rodrigues. Així, el vector  $N(u, v_0)$  serà constant al variar  $u$  i, anàlogament, el vector  $N_v(u, v_0)$ , ja que la seva derivada respecte de  $u$  és  $(N_v)_u = (N_u)_v = 0$ . Denotem per  $N_0$  i  $(N_v)_0$  aquests vectors.

Com per tot punt de  $V$  passa una corba  $v = cnt$ , se segueix que  $N_u = 0$  a  $V$ . D'aquí en resulta:

$$\langle \varphi, N \rangle_u = \langle \varphi_u, N \rangle + \langle \varphi, N_u \rangle = 0 \implies \langle \varphi, N \rangle = g(v),$$

per a certa funció  $C^\infty$ ,  $g(v)$ .

Derivant respecte de  $v$  la funció  $g(v)$  trobem

$$\langle \varphi, N_v \rangle = g'(v).$$

En definitiva, veiem que la corba  $v = v_0$  satisfà

$$\begin{aligned} \langle \varphi(u, v_0), N_0 \rangle &= g(v_0) \\ \langle \varphi(u, v_0), (N_v)_0 \rangle &= g'(v_0) \end{aligned}$$

i, per tant, està continguda en la intersecció de dos plans. Basta observar finalment que aquests dos plans es tallen en una recta, ja que  $N_v \neq 0$ , perquè els punts són parabòlics, i, en conseqüència,  $N, N_v$  són linealment independents.

*3a observació:* les rectes  $\ell_p, \ell_q$  per dos punts diferents  $p, q \in S$  són paral·leles.

En primer lloc, observem que les rectes  $\ell_p, \ell_q$  no es poden tallar, ja que per l'observació anterior només passa una recta per cada punt de  $S$ . Acceptarem ara el fet següent, (cf. [dC], p. 385):

*Asserció:* si  $S$  és una superfície regular amb  $K \equiv 0$  i  $p \in S$ , aleshores l'aplicació exponencial  $\exp_p$  està definida en tot el pla tangent

$$\exp_p : T_p S \longrightarrow S,$$

*és exhaustiva i és una isometria local.*

La idea és ara veure que  $\ell_p, \ell_q$  són paral·leles, aixecant-les al pla tangent  $T_p S$  i comprovant que allà ho són. El raonament qualitatiu és el següent: com  $S$  és arc-connexa, existeix un camí continu  $\alpha(t)$  que uneix  $p = \alpha(0)$  i  $q = \alpha(1)$ . Recobrim  $\alpha(I)$  considerant en cada punt  $\alpha(t)$  un entorn sobre al qual l'aplicació  $\exp_p$  indueixi una isometria local; pel lema del nombre de Lebesgue, hi ha una partició  $0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  de l'interval  $I$  tal que, per a tot  $i$  la imatge  $\alpha([t_i, t_{i+1}])$  està constinguda en un d'aquests entorns.

Així, començant en el primer tram,  $[t_0, t_1]$ , les preimatges de  $\ell_p, \ell_{\alpha(t_1)}$  per l'aplicació exponencial són dues rectes (recordem que l'exponencial és una isometria en aquest entorn). Però, aleshores, raonant inductivament des de  $t_1$  fins a  $t_n$ , veiem que les preimatges de les rectes  $\ell_p, \ell_q$  són rectes del pla tangent que són paral·leles.

Com totes les rectes són paral·leles, podem considerar-les parametritzades per un vector director constant comú,  $\mathbf{w}$ . Finalment, basta fer una secció de  $S$  per un pla ortogonal a  $\mathbf{w}$  per obtenir una corba directriu  $\alpha(t)$ , amb la qual cosa  $S$  serà el cilindre  $\alpha(u) + v\mathbf{w}$ .

## 7.6 Superfícies de curvatura constant negativa: el pla hiperbòlic

La pseudoesfera és un exemple de superfície de curvatura constant negativa, però no és una superfície completa. De fet, Hilbert va provar el resultat següent (per a la demostració vegeu [dC] o [S]):

**7.6.1 Teorema de Hilbert.** *No hi ha superfícies completes de  $\mathbb{R}^3$  de curvatura constant negativa.* ■

Aquest resultat pot semblar que exhaurix les possibilitats de tenir un exemple de superfície que modelitzi la geometria sobre superfícies completes de curvatura constant

negativa, però podem seguir Riemann i adoptar un punt de vista més general: en efecte, la curvatura i les geodèsiques d'una superfície depenen únicament de la primera forma fonamental, que defineix un producte escalar sobre cada pla tangent, i no de que aquesta primera forma fonamental sigui la corresponent al producte escalar ordinari de  $\mathbb{R}^3$ . Concretament amb la definició següent:

**7.6.2 Definició.** Sigui  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superfície regular. Una *mètrica riemanniana*  $g$  a  $S$  assigna a cada punt  $p \in S$  un producte escalar  $g_p$  en el pla tangent  $T_p S$  de manera que, per a qualsevol parametrització regular  $\varphi : U \rightarrow S$ , les funcions

$$\begin{aligned} g_{ij} : U &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (u, v) &\mapsto g_{\varphi(u,v)}(\varphi_i, \varphi_j), \end{aligned}$$

són diferenciables (on hem escrit  $\varphi_1 = \varphi_u, \varphi_2 = \varphi_v$ ). Al parell  $(S, g)$  l'anomenarem *superfície riemanniana*.

En el cas de les superfícies regulars analitzades fins ara,  $g_p$  no és altra cosa que la primera forma fonamental  $I_p$ . Observem que, des del punt de vista conjuntista, les superfícies riemannianes i els seus vectors tangents estan a  $\mathbb{R}^3$ , però les diferents mètriques  $g_p$  no són les mètriques heretades de la mètrica ordinària de  $\mathbb{R}^3$ ; és en aquest sentit que podem dir que *les superfícies riemannianes no viuen a  $\mathbb{R}^3$* .

Tots aquells conceptes desenvolupats en capítols anteriors que depenen únicament de la primera forma fonamental s'estenen a les superfícies riemannianes, com per exemple les longituds de corbes, els angles entre vectors tangents o l'àrea d'una regió compacta.

Pel teorema egreri de Gauss, la curvatura d'una superfície depèn únicament de la seva primera forma fonamental, per la qual cosa és possible ara, per a les superfícies riemannianes, definir la curvatura  $K$  mitjançant la fórmula de Gauss del capítol 3, que en el cas en què  $g_{12} = 0$  es redueix a

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left( \left( \frac{g_{11,v}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right)_v + \left( \frac{g_{22,u}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right)_u \right).$$

A més, podem definir les geodèsiques a partir de les equacions diferencials amb les quals les hem caracteritzat al capítol 5. Els resultats intrínsecs demostrats fins ara seran també certs per a les superfícies riemannianes, així, per exemple: (i) les geodèsiques són corbes que localment minimitzen la distància; (ii) en les superfícies riemannianes completes dos punts es poden unir per una geodèsica minimal (Hopf-Rinow); (iii) la suma dels angles d'un triangle geodèsic satisfà la fórmula de l'excès, ja que se satisfà el teorema de Gauss-Bonnet. En particular, aquest darrer teorema mostra que les mètriques no poden ser arbitràries.

### *El pla hiperbòlic: el semiplà de Poincaré.*

Anomenarem *pla hiperbòlic* a tota superfície riemanniana completa i simplement conexa de curvatura constant  $-1$ . Hi ha diferents models del pla hiperbòlic, començarem presentant el conegut com a semiplà de Poincaré:

La superfície  $\mathbb{H}$  del semiplà de Poincaré és l'obert de  $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\},$$

que parametritzem amb les coordenades cartesianes  $\varphi(u, v) = (u, v)$ , amb la mètrica riemanniana definida per

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{pmatrix}.$$

Observem que aquesta matriu defineix un producte escalar que en cada punt és igual al producte escalar ordinari escalat per l'alçada del punt respecte de l'eix  $OX$ . Analitzem a continuació algunes de les propietats d'aquesta superfície riemanniana:

(a) *Longitud i angles entre corbes.*

Donat que la mètrica és un escalat de la mètrica ordinària que depèn de  $v$ , les longituds de vectors tangets i de corbes es deformen conforme ens apropem a l'eix  $OX$  o ens allunyem cap a l'infinit en la direcció  $OY$ . Per fer-nos una idea més concreta, calculem la longitud del segment de la recta  $u = 0$  entre  $v_0 = 1$  i  $v_1 = a$ :

$$\ell_1^a = \left| \int_1^a \sqrt{g_{11}(u')^2 + 2g_{12}u'v' + g_{22}(v')^2} dt \right| = \left| \int_1^a \sqrt{g_{22}} dt \right| = \left| \int_1^a \frac{dt}{t} dt \right| = |\ln a|.$$

Així veiem, per exemple, que la longitud del segment entre  $v_0 = 1$  i  $v_1 = 2$  és la mateixa que la longitud entre  $v_0 = 1$  i  $v_1 = 1/2$ , en ambdós casos és  $\ell = \ln 2$  i que, en general, quan ens acostem a l'eix  $v = 0$ , que està fora de  $\mathbb{H}$ , les longituds des de  $v_0 = 1$  van augmentant fins a l'infinit.

Respecte de l'angle entre dos vectors tangents, el fet que sigui la mètrica ordinària escalada per un factor comporta que sigui una mètrica conforme, és a dir, que no canvia la mesura dels angles. Més concretament, en qualsevol punt de  $\mathbb{H}$  el pla tangent és el propi  $\mathbb{R}^2$ ; considerem dos vectors tangents  $\mathbf{w}_1 = (a, b)$ ,  $\mathbf{w}_2 = (c, d)$ , aleshores el cosinus de l'angle que formen respecte de la mètrica riemanniana és

$$\cos \theta = \frac{(a, b) \begin{pmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}{\sqrt{(a, b) \begin{pmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} \sqrt{(c, d) \begin{pmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}} = \frac{\langle (a, b), (c, d) \rangle}{|(a, b)| \cdot |(c, d)|},$$

on ara el producte escalar i els mòduls ho són en referència al producte ordinari. És a dir, els angles entre vectors tangents a  $\mathbb{H}$  (i, per tant, entre corbes) són els mateixos que al semiplà ordinari.

(b) *Curvatura de Gauss.*

Per calcular la curvatura, observem que  $g_{12} = 0$  i, per tant, podem utilitzar la fórmula de Gauss en la forma

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left( \left( \frac{g_{11,v}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right)_v + \left( \frac{g_{22,u}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right)_u \right) \\ &= -\frac{v^2}{2} \left( \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{2}{v} \right) \right) \\ &= -\frac{v^2}{2} \cdot \frac{2}{v^2} \\ &= -1, \end{aligned}$$

és a dir,  $\mathbb{H}$  és una superfície riemanniana de curvatura constant negativa.

(c) *Geodèsiques de  $\mathbb{H}$ .*

Com la mètrica de  $\mathbb{H}$  és ortogonal,  $g_{12} = 0$ , els símbols de Christoffel es calculen segons

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{g_{11,u}}{g_{11}} = 0, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2} \frac{g_{11,v}}{g_{22}} = \frac{1}{v}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \frac{g_{11,v}}{g_{11}} = \frac{1}{v}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \frac{g_{22,u}}{g_{22}} = 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{g_{22,u}}{g_{11}} = 0, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \frac{g_{22,v}}{g_{22}} = \frac{1}{v}. \end{aligned}$$

Per tant, les equacions de les geodèsiques són

$$\begin{aligned} u'' - \frac{2}{v} u' v' &= 0, \\ v'' + \frac{1}{v} (u')^2 - \frac{1}{v} (v')^2 &= 0. \end{aligned}$$

Observem que les rectes  $u = cnt$  són solució, ja que substituint en les equacions anteriors trobem

$$\begin{aligned} 0 &= 0, \\ v'' - \frac{1}{v} (v')^2 &= 0, \end{aligned}$$

i la segona equació determina el paràmetre arc amb el qual recórrer la corba.

Per trobar altres geodèsiques, observem que la primera equació diferencial la podem escriure en la forma

$$\frac{u''}{u'} = \frac{2v'}{v},$$

que és una equació de variables separades que podem integrar per obtenir

$$u' = cv^2,$$

on  $c$  és una constant. A més, la corba, essent una geodèsica, estarà parametritzada per l'arc i per tant ha de satisfer

$$\frac{(u')^2}{v^2} + \frac{(v')^2}{v^2} = 1 \implies \frac{(c^2v^2)^2}{v^2} + \frac{(u')^2}{v^2} = 1 \implies v' = v\sqrt{1 - c^2v^2},$$

amb la qual cosa trobem,

$$u = \int \frac{du}{dv} dv = \int \frac{du}{ds} \frac{ds}{dv} ds = \int \frac{cv}{\sqrt{1 - c^2v^2}} ds.$$

Podem calcular aquesta primitiva amb un canvi de variable  $cv = \sin t$  per obtenir, finalment,

$$u = -\frac{1}{c}\sqrt{1 - c^2v^2} + d,$$

on  $d$  és una constant. Si escrivim aquesta equació en la forma

$$(u - d)^2 + v^2 = \frac{1}{c^2},$$

veiem que aquestes geodèsiques són arcs de circumferències centrades a l'eix  $OX$ .

En definitiva, les geodèsiques de  $\mathbb{H}$  són les rectes paral·leles a l'eix  $OY$  i les semi-circumferències centrades a l'eix  $OX$ . A més, un càlcul senzill mostra que aquestes geodèsiques són de longitud infinita per la qual cosa la variació del seu paràmetre arc és  $-\infty < s < \infty$ , és a dir,  $\mathbb{H}$  és una superfície riemanniana completa.

Resumim els càlculs i observacions anteriors en la forma:

**7.6.3 Proposició.** *El pla hiperbòlic  $\mathbb{H}$  és una superfície riemanniana completa de curvatura constant negativa  $-1$ .* ■

### *Un altre model del pla hiperbòlic.*

Hi ha altres superfícies riemannianes completes de curvatura constant  $-1$  que serveixen com a model del pla hiperbòlic. Per exemple, deixem com exercici provar que el



disc (obert) unitat del pla que, parametritzat en coordenades polars  $(u \cos v, u \sin v)$  té mètrica riemanniana

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-u^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{1-u^2} \end{pmatrix}$$

n'és un d'aquests models (observem que podem passar de  $\mathbb{H}$  a  $\mathbb{D}$  mitjançant la transformació holomorfa, i per tant conforme,  $z \mapsto \frac{iz+1}{z+i}$ ).

Un altre model del pla hiperbòlic s'obté a partir de la mètrica de Minkowski de  $\mathbb{R}^3$ : considerem el producte bilineal  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$  definit per

$$\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle_{-1} = -xx' - yy' + zz'.$$

La matriu d'aquesta forma bilineal en la base canònica de  $\mathbb{R}^3$  és

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i, per tant, és una forma bilineal no degenerada, però no és un producte escalar a  $\mathbb{R}^3$  ja que no és definida positiva. Se l'anomena la *mètrica de Minkowski* de  $\mathbb{R}^3$ .

Considerem la superfície  $\mathbb{M}$  corresponent al full superior de l'hiperboloide definit per  $|(x, y, z)|_{-1} = 1$ , és a dir,

$$-x^2 - y^2 + z^2 = 1, \quad z > 0.$$

**7.6.4 Lema.** La mètrica de Minkowski indueix una mètrica riemanniana a  $\mathbb{M}$ .

*Demostració.* Considerem la parametrització

$$\varphi(u, v) = (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, \cosh v).$$

Aleshores, en la base  $\varphi_u, \varphi_v$  del pla tangent, la mètrica de Minkowski té matriu

$$g = \begin{pmatrix} \sinh^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que és definida positiva en tots els punts i defineix una mètrica riemanniana a  $\mathbb{M}$ . ■

**7.6.5 Proposició.** Amb la mètrica induïda per la mètrica de Minkowski, la superfície riemanniana  $\mathbb{M}$  és completa i de curvatura constant  $-1$ . A més, les seves geodèsiques són les seccions planes de  $\mathbb{M}$ .

*Demostració.* Calculem la curvatura de  $\mathbb{M}$  parametritzant-la com una superfície de revolució, com en la demostració del lema. Com la corba  $(\sinh v, 0, \cosh v)$  està parametritzada per l'arc (respecte de la mètrica de Minkowski!), podem calcular la curvatura segons

$$K = -\frac{r''(v)}{r(v)} = -\frac{(\sinh v)''}{\sinh v} = -1.$$

A continuació analitzem les geodèsiques. En primer lloc considerem les geodèsiques pel punt  $(0, 0, 1)$ : són els meridians  $u = cnt$ , que corresponen a la intersecció de  $\mathbb{M}$  amb els plans que contenen l'eix  $OZ$ .

Sigui ara  $p \in \mathbb{M}$  un punt qualsevol. Afirmem que existeix una transformació lineal  $A$  que deixa invariant la mètrica de Minkowski i tal que  $Ap = (0, 0, 1)$ . (A les transformacions lineals que deixen invariant la forma de Minkowski se les anomena transformacions de Lorentz.)

En efecte, les rotacions

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

són transformacions de Lorentz, per la qual cosa podem suposar que  $p = (\sinh r, 0, \cosh r)$  és un punt del pla  $XZ$ . Però, aleshores, la transformació de Lorentz

$$\begin{pmatrix} -\cosh r & 0 & \sinh r \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh r & 0 & \cosh r \end{pmatrix}$$

transforma  $p$  en  $(0, 0, 1)$ .

Com les transformacions de Lorentz conserven les geodèsiques, les geodèsiques per  $p$  són les preimatges per la transformació de Lorentz amb  $Lp = (0, 0, 1)$  de les geodèsiques per  $(0, 0, 1)$ . El resultat se segueix de que  $L$  és lineal. Veiem, a més, que aquestes geodèsiques són completes. ■

# Bibliografia

- [AT] M. Abate, F. Tovena: *Curves and Surfaces*. Universitext. Springer Verlag, 2012.
- [B] C. Bär: *Elementary Differential Geometry*. Cambridge Univ. Press, 2010.
- [Bl] E. Bloch: *A first course in Geometric Topology and Differential Geometry*. Birkhäuser Verlag, 1997.
- [dC] M. P. Do Carmo: *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [L] J. M. Lee: *Riemannian Geometry*. GTM 176, Springer Verlag, 1997.
- [Mc] J. McCleary: *Geometry from a differentiable viewpoint*. Cambridge Univ. Press, 1994.
- [MP] R. Millman, G. Parker: *Elements of Differential Geometry*. Prentice-Hall, 1977.
- [MR] S. Montiel, A. Ros: *Curves and Surfaces*. American Math. Soc. 2005.
- [M] J. Monterde: *Geometria Diferencial de Corbes i Superfícies*.  
[www.uv.es/monterde/pdfs/totGDC.pdf](http://www.uv.es/monterde/pdfs/totGDC.pdf), 2009.
- [O] J. Oprea: *Differential Geometry and its Applications*. Prentice-Hall, 1997.
- [R] A. Reventós: *Geometria Axiomàtica*. Institut d'Estudis Catalans, 1993.
- [S] M. Spivak: *A comprehensive introduction to differential geometry (5 vols)*. Publish or Perish, 1979.